TRATTATO DI GEOMETRIA ANALITICA IN PARTICOLARE DELLE LINEE DI...

Tommaso Del Beccaro



TRATTATO

DI

GEOMETRIA ANALITICA

IN PARTICOLARE

DELLE

LINEE DI PRIMO E SECONDO ORDINE NEL PIANO

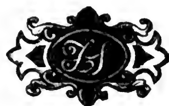
E

DELLE RETTE E DEI PIANI NELLO SPAZIO

COMPILATO

DA TOMMASO DEL BECCARO

DOTTORE IN MATEMATICHE



FIRENZE 1862

TIPOGRAFIA SPIOMBI

Via del Palagio, Palazzo Quaratesi

N. 2.

ALL'ILLUSTRE COLONNELLO

CAVALIERE **FEDERIGO MANASSERO** DI COSTIGLIOLE

IL QUALE

DURANTE L'ANNO SCOLASTICO 1861-62

SAPIENTEMENTE RESSE IL COLLEGIO MILITARE DI FIRENZE

QUESTA OPERA

DETTATA PER GLI ALUNNI

CHE IN QUELLO INTENDEVANO AI PIÙ ALTI STUDI MILITARI

DEDICA L'AUTORE

AVVISO

Questo Trattato fu in prima composto per comodo degli Alunni del Collegio militare di Firenze che aspiravano ad entrare nella R. Accademia. Però, mutato l' ordinamento degli Istituti militari del Regno, e tolto ai Collegi l' insegnamento dell' Algebra superiore e della Geometria analitica, esso ebbe un maggiore sviluppo onde servire come avviamento alle moderne dottrine.

Rendo pubbliche grazie ai Signori Professori Maggiore Odoardo Franchini e Dott. Antonio Mochi per i consigli e per la assistenza con cui mi hanno sempre efficacemente sostenuto.

T. Del Beccaro

GEOMETRIA NEL PIANO



CAPITOLO I.

Considerazioni generali.

1. La geometria, investigando le proprietà e la misura dell'estensione figurata, considera un doppio ordine di relazioni esistenti fra le varie parti che compongono una figura o fra differenti figure. Le prime relazioni, che diconsi *metriche*, riguardano solo la grandezza delle linee, delle superficie e dei volumi appartenenti alla figura o alle figure considerate ed hanno luogo fra i valori assoluti di tali quantità: le altre, dette *descrittive*, dipendono dalla forma e dalle posizioni rispettive delle varie parti di una figura o delle figure, indicando per esempio se un punto è situato sopra o sotto una retta data, se una retta è diretta a destra o a sinistra di un altra etc. Le proprietà delle figure che contengono relazioni descrittive si nominano parimente *proprietà descrittive*, e quelle dipendenti da relazioni metriche diconsi *proprietà metriche*. Per esempio i teoremi « *Due rettangoli stanno fra loro come i prodotti rispettivi delle basi per le altezze* » « *In un quadrilatero qualunque la somma dei quadrati dei quattro lati eguaglia la somma dei quadrati delle diagonali più quattro volte il quadrato della retta che congiunge i punti di mezzo di queste* » esprimono proprietà *metriche*; ed i teoremi « *Le tre altezze di un triangolo si segano in un medesimo punto* » « *In qualunque quadrilatero le bisettrici dei quattro angoli formano un secondo quadrilatero le di cui diagonali passano per i punti d' intersezione dei lati opposti del primo* » significano proprietà *descrittive*.

2. Quasi fino dall' origine dell'Algebra si espressero mediante formule analitiche le relazioni metriche all' oggetto di dimostrare teo-

remi ad esse relativi, o di risolvere problemi ove in generale era da determinarsi il valore assoluto dell'elemento di una figura. I metodi che per tali ricerche si adoperano non offrono gravi difficoltà: infatti le linee, le superficie ed i volumi dei quali consta una figura determinata, considerati indipendentemente dalla posizione relativa che in essa occupano, si possono esprimere con numeri e rappresentare per mezzo delle lettere dell'alfabeto le quali allora significano il valore assoluto di tali grandezze od i rapporti che hanno colla unità della medesima loro specie. Quindi le relazioni geometriche da cui sono esse congiunte si possono tradurre in equazioni, le quali poi, trasformate e combinate insieme, conducono a scuoprire nuove proprietà appartenenti alla figura considerata o a determinare una grandezza incognita. Così, per esempio, si abbia da risolvere il seguente

Problema. *Dati i tre lati di un triangolo determinarne le altezze.*

Essendo ABC il triangolo dato s'indichino con a, b, c i valori assoluti dei lati opposti rispettivamente ai vertici A, B, C, con x_1, x_2, x_3, quelli delle perpendicolari abbassate da ciascuno di essi vertici sul lato opposto, e finalmente con y_1, $a-y_1$; y_2, $b-y_2$; y_3, $c-y_3$, quelli dei segmenti determinati da ogni perpendicolare sulla respettiva base. La relazione fra il quadrato della ipotenusa ed i quadrati dei cateti sussistente in ciascuno dei sei triangoli rettangoli che si formano abbassando le perpendicolari conduce alle seguenti equazioni

$$x_1^2+y_1^2=b^2, \qquad x_2^2+y_2^2=c^2, \qquad x_3^2+y_3^2=a^2,$$
$$x_1^2+(a-y_1)^2=c^2, \qquad x_2^2+(b-y_2)^2=a^2, \qquad x_3^2+(c-y_3)^2=b^2.$$

Eliminando le incognite ausiliari y_1, y_2, y_3, si ottengono le altezze le cui espressioni, dopo avere introdotto il perimetro $2p=a+b+c$ e fatto $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\Delta$, sono

$$x_1=\frac{2\Delta}{a}, \qquad x_2=\frac{2\Delta}{b}, \qquad x_3=\frac{2\Delta}{c}.$$

Da questi valori si deduce che Δ è l'area del triangolo e che è sempre un numero reale e positivo: infatti, poichè un lato è minore della somma degli altri due, si hanno le diseguaglianze $a<p$, $b<p$, $c<p$, e perciò positivo il prodotto sotto il segno radicale; ed, essendo x_1, x_2, x_3 valori assoluti come a, b, c, il radicale deve essere preso necessariamente col segno $+$.

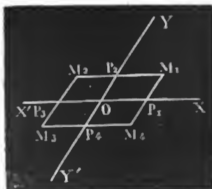
3. I teoremi e i problemi nei quali si considerano le *relazioni descrittive* delle figure richieggono, onde esser trattati analiticamente, processi di un'altro ordine. Il primo fu esposto da Descartes nella sua Geometria.

Il metodo nominato cartesiano, dal nome del suo inventore, allorchè è applicato alle figure che possono considerarsi tracciate in un piano, consiste nel prendere in questo due rette qualunque concorrenti, nel considerarle come fisse e perciò note di posizione e nel riferire ad esse qualunque punto giacente nel piano col mezzo di rette ausiliari condotte da questo a ciascuna di esse sempre secondo una determinata legge. Allorchè poi è applicato alle figure nello spazio consiste nel prendere tre piani qualunque, ma concorrenti in un punto, e nel ritenerli come fissi e perciò noti di posizione, e nel riferire ad essi ogni punto dello spazio per mezzo di tre rette ausiliari condotte da questo a ciascuno di essi secondo una legge costante.

Determinazione di un punto nel piano.

4. *Coordinate rettilinee.* Siano prese arbitrariamente nel piano le rette XOX′, e YOY′ e sia O il punto della loro intersezione. Essendo M_1 un punto qualunque la cui posizione deve riferirsi a quella di tali rette si conducano per esso M_1M_2, e M_1M_4, rispettivamente parallele a XX′ e YY′, e s'indichino con P_2 e P_1 i punti ove ciascuna sega quella di esse alla quale non è parallela: quindi si compia il parallelogrammo avente i lati M_1M_2 e M_1M_4 doppi delle lunghezze M_1P_2 e M_1P_1.

Per determinare completamente la posizione del punto M_1 è necessario e sufficiente che siano noti i valori assoluti delle lunghezze $M_1P_2 = OP_1$ e $M_1P_1 = OP_2$ e sia pur nota la direzione in cui debbono essere contate sulle rette OX e OY relativamente ad O. Infatti rappresentando con a e b i valori assoluti di tali lunghezze, cioè $a = OP_1$ e $b = OP_2$, ed essendo $OP_1 = OP_3$, $OP_2 = OP_4$, è evidente che ad a e a b corrispondono i quattro punti M_1, M_2, M_3, M_4 i quali due a due sono poi simmetricamente disposti rispetto alle rette XX' e YY', ed è pure evidente che ciascuno di essi giace in uno dei quattro angoli da quelle formati: cosicchè per distinguerli l'uno dall'altro è necessario conoscere in quale dei quattro angoli ciascuno è situato. Perciò si stabilisce il principio che *ritenendo come positive le lunghezze contate sopra una retta in direzione determinata relativamente ad un punto fisso su di essa, si debbano considerare come negate quelle contate nella direzione opposta, essendo però interamente arbitraria la direzione nella quale da prima si misurano le rette positive.* Nel caso attuale si ritengono positive le lunghezze misurate sulla OX a destra del punto O, e quelle misurate sulla OY al di sopra di esso; e pertanto sono negative quelle prese nelle direzioni opposte OX' e OY'.



5. Le rette fisse XX' e YY' si chiamano *assi coordinati* e diconsi *obliquangoli* se l'angolo YOX è acuto od ottuso ed *ortogonali* se è retto: la linea XX' prende il nome speciale di *asse delle ascisse* e YY' quello di *asse delle ordinate*; ed il punto O della loro intersezione quello di *origine de'le coordinate.* Le rette ausiliari $M_1P_2 = OP_1$ e $M_1P_1 = OP_2$, colle quali si riferisce la posizione del punto M_1 a quella degli assi coordinati, si chiamano le sue *coordinate*: la OP_1, contata sull'asse XX', dicesi *ascissa* e la OP_2, presa sull'asse YY', *ordinata* e si rappresentano con le lettere x e y.

Per tali convenzioni le coordinate dei vertici del parallelogrammo $M_1M_2M_3M_4$ sono facilmente distinte, e si ha

$$\left.\begin{matrix}x=+a\\y=+b\end{matrix}\right\}\text{per } M_1,\quad \left.\begin{matrix}x=-a\\y=+b\end{matrix}\right\}\text{per } M_2,\quad \left.\begin{matrix}x=-a\\y=-b\end{matrix}\right\}\text{per } M_3,\quad \left.\begin{matrix}x=+a\\y=-b\end{matrix}\right\}\text{per } M_4.$$

Queste coordinate non differiscono nel valore assoluto ma solo nel segno secondo che il punto è situato nell'uno o nell'altro dei quattro angoli formati dagli assi.

Essendo note le coordinate di un punto è facilissimo determinarne la posizione. Infatti siano date $x=+a$, $y=-b$: si prenda sull'asse delle ascisse nella direzione OX delle grandezze positive una lunghezza $OP_1=a$ e da P_1 si conduca una parallela a YY'; quindi presa sull'asse delle ordinate nella direzione delle grandezze negative una lunghezza $OP_4=b$ da P_4 si conduca una parallela a XX'; il punto M_4 ove le rette condotte da P_1 e P_4 si tagliano è quello richiesto.

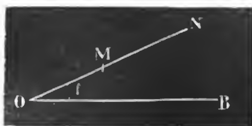
Il punto che ha per coordinate $x=0$ e $y=b$ giace sull'asse delle y ad una distanza dall'origine misurata da b: infatti essendo nulla l'ascissa, ambedue le sue estremità cadono nell'origine e la direzione dell'ordinata coincide coll'asse YY'.

Parimente il punto espresso da ($x=a$, $y=0$) è posto sull'asse delle x alla distanza a dall'origine.

Il punto ($x=0$, $y=0$) è l'origine delle coordinate.

6. *Coordinate polari.* La posizione di un punto in un piano può determinarsi in modi differentissimi: tra questi è importante quello delle coordinate polari.

Avendo tracciato in un piano una retta fissa OB e determinato su questa un punto O come origine, la posizione di un punto M qualunque del piano è in tutto definita allorchè è nota la sua distanza $OM=\rho$ dal punto O e l'angolo $MOB=\varphi$: infatti dati questi elementi si perviene a determinare il punto M conducendo da O una retta ON che formi con OB l'an-



golo dato φ, e prendendo su di essa, partendo da O, una lunghezza eguale alla data ρ.

La retta fissa OB chiamasi *direttrice* o *asse polare*, e il punto O dicesi *polo*: l'angolo φ e la lunghezza ρ, dette *angolo polare* e *raggio vettore*, sono le *coordinate polari* del punto M. L'angolo φ si considera come positivo allorchè si suppone che il raggio vettore, per formarlo, abbia ruotato da destra a sinistra relativamente alla direttrice, e come negativo quando si immagina che tal moto del raggio vettore abbia avuto luogo in senso contrario. Il valore di ρ può esser qualunque da 0 a $+\infty$. Per $\rho=0$ si ha il polo: per $\varphi=0$ e $\rho=a$ si ha un punto della direttrice.

Problemi

7. Problema 1°. *Dati due punti* M_1 (x_1y_1), M_2 (x_2y_2) *esprimerne la distanza per mezzo delle loro coordinate.*

Se gli assi coordinati sono obliquangoli rappresentiamone con θ l'angolo, e conduciamo M_2Q parallela all'asse OX. Dal triangolo M_1M_2Q si ricava



$M_1M_2^2=M_2Q^2+M_1Q^2-2M_2Q\times M_1Q \cos M_1QM_2$ ovvero indicando con δ la distanza M_1M_2 ed osservando che $M_2Q=x_1-x_2$, $M_1Q=y_1-y_2$, e che, essendo $M_1QM_2=180^0-\theta$, si ha $\cos M_1QM_2=-\cos\theta$, ed estraendo la radice quadrata

$$(1)\qquad \delta=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\cos\theta}.$$

Quando gli assi sono ortogonali si ha $\theta=90^0$ e la formula (1) diventa

$$(2)\qquad \delta=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Nel caso in cui uno dei punti, per esempio M_2, coincide con O

le formule (1) e (2) diventano

$$(3) \qquad \delta=\sqrt{x_1^2+y_1^2+2x_1y_1\cos\theta},$$

$$(4) \qquad \delta=\sqrt{x_1^2+y_1^2},$$

e danno la distanza di un punto all'origine; la (3) per assi obliquangoli e la (4) per assi ortogonali.

Problema 2.° *Esprimere la distanza di due punti mediante le loro coordinate polari.*

Indichiamo con δ la lunghezza M_1M_2, e siano ρ_1 e ρ_2 i raggi vettori e φ_1 e φ_2 gli angoli polari dei punti M_1 e M_2 dal triangolo M_1OM_2 si ottiene immediatamente

$$(5) \qquad \delta=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Problema 3.° *Dati due punti M_1 (x_1y_1) e M_2 (x_2y_2) determinarne un terzo M_3 che divida la retta che li congiunge in una data ragione $m : n$, gli assi coordinati essendo qualunque.*

Si conducano le coordinate dei punti dati, e siano $X=OP_3$ e $Y=M_3P_3$ quelle del punto cercato M_3; quindi da M_1 e M_3 si conducano le rette $M_1Q_1Q_2$ e M_3q_2 parallele ad OX.

Dai triangoli simili $M_1Q_1M_3$, $M_1Q_2M_2$, e $M_3q_2M_2$ si deducono le proporzioni

$$M_1M_3 : M_3M_2 :: M_1Q_1 : Q_1Q_2, \quad M_1M_3 : M_3M_2 :: M_3Q_1 : M_2q_2$$

e quindi

$$m : n :: X-x_1 : x_2-X, \qquad m : n :: Y-y_1 : y_2-Y :$$

e da queste

(6) $$X=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \qquad Y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}.$$

Se il punto richiesto non cade fra M_1 e M_2, ma esternamente come M_3^1, operando in modo analogo si hanno le proporzioni

$$m : n :: X-x_1 : X-x_2 , \quad m : n :: Y-y_1 : Y-y_2$$

donde

(7) $$X=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \qquad Y=\frac{my_2-ny_1}{m-n}.$$

Rappresentazione analitica delle linee mediante equazioni.

8. Le coordinate x e y potendo variare fra $+\infty$ e $-\infty$, è sempre possibile rappresentare con esse un punto qualunque del piano.

Consideriamo ora una serie di punti, non sparsi a caso nel piano ma disposti secondo una legge costante in modo che colla loro successione costituiscano una linea continua, la quale sia per tal modo definita da qualche proprietà caratteristica conveniente a tutti i suoi punti. La espressione analitica di tal legge, o di tale proprietà, cioè la relazione $f(x,y)=0$ da essa derivante fra le coordinate variabili di un punto qualunque della linea si chiama l'*equazione* di questa linea, la quale perciò prende il nome di *luogo geometrico.*

Reciprocamente, essendo data l'equazione di una linea, la natura di questa e la sua posizione nel piano rispetto ad un dato sistema di assi coordinati sono completamente note. Infatti dando ad una delle variabili, per esempio a x, un valore qualunque arbitrario α e risolvendo l'equazione $f(\alpha, y)=0$, contenente la sola incognita y, si ottengono per questa uno o più valori $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$; e perciò i punti espressi da $(x=\alpha, y=\beta_1)$, $(x=\alpha, y=\beta_2)$, ... $(x=\alpha, y=\beta_n)$ evidentemente appartengono alla curva. Quindi attribuendo a x valori diversi fra $+\infty$ e $-\infty$, sarà possibile de-

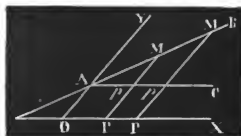
terminare un qualsivoglia numero di punti appartenenti alla curva. Si noti però, che, dovendosi prendere per y i soli valori reali, ai differenti valori della x non corrisponde lo stesso numero di valori di y e che alcune volte non ve ne corrisponde alcuno.

Procedendo in modo simile si può esprimere la legge di generazione di una curva data, o una sua generalissima proprietà, mediante una equazione fra le coordinate polari di un suo punto qualunque: questa ne è allora l'equazione in coordinate polari.

Linea retta.

9. Problema I. *Data una retta in un piano trovare la sua equazione supponendo gli assi coordinati obliquangoli.*

Sia AB la retta data la quale seghi in A l'asse delle y: da questo punto si conduca la retta AC parallela all'asse delle x, e preso un punto M qualunque della retta si tiri la sua ordinata MP e sia p il punto ove taglia la AC. Dal triangolo MpA si ricava



$Mp = Ap \dfrac{sen\, MAC}{sen\, AMp}$, e quindi si ha

$$MP = Mp + pP = Ap \frac{sen MAC}{sen AMp} + pP.$$

Ponendo $MP = y$, $Ap = OP = x$, $pP = AO = b$, che è il segmento tagliato dalla retta data sull'asse delle y e contato dall'origine, $MAC = \alpha$, angolo che la retta fa coll'asse delle x, e l'angolo degli assi $YOX = \theta$, la equazione precedente diventa

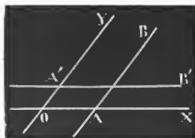
$$(1) \qquad y = \frac{sen\, \alpha}{sen(\theta - \alpha)} x + b, \text{ ovvero } y = ax + b$$

facendo $a = \dfrac{sen\, \alpha}{sen(\theta - \alpha)}$. Questa, avendo luogo per tutti i punti della retta data, è la sua *equazione*.

Le quantità costanti a e b sono necessarie per determinare la posizione della retta nel piano.

Se il sistema di assi coordinati è ortogonale abbiamo $\theta=90°$, e quindi $a=\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}=tang\,\alpha$ esprime la tangente trigonometrica dell' angolo formato dalla retta coll' asse delle x.

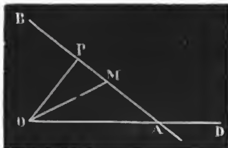
Se la retta data AB è parallela all' asse delle y, indicando con a il segmento OA che essa determina sull' asse delle x contato dall' origine, la sua equazione è evidentemente $x=a$, esprimendo questa il luogo di tutti i punti che hanno l'ascissa costante a. Similmente l'equazione della retta A′ B′ parallela all' asse delle x è $y=b$, dove b è il segmento OA′ che essa determina sull' asse.



Infine l'equazione $x=0$ rappresenta l'asse delle y, $y=0$ quello delle x e il sistema delle due equazioni $x=0$, $y=0$ il punto O, origine delle coordinate.

Problema II. *Data di posizione una retta, determinare la sua equazione in coordinate polari.*

Siano O il polo, OD l'asse polare e AB la retta data: condotta da O la perpendicolare OP sopra AB e ad un punto qualunque M della retta il raggio vettore OM, si ponga $OP=p$, $POA=\alpha$, $OM=\rho$ e $MOA=\varphi$. Dal triangolo rettangolo OPM si trae immediatamente



(2) $$OP=OM\,cos\,MOP \quad \text{ovvero} \quad p=\rho\,cos\,(\alpha-\varphi)$$

la quale, convenendo ad ogni punto della retta, ne è l'equazione.

Se la retta data è perpendicolare all' asse polare, ovvero se l'angolo α è nullo, l'equazione polare della retta diviene $p=\rho\,cos\,\varphi$.

Circonferenza.

10. Problema I. *Trovare l'equazione della circonferenza del circolo il cui centro è nel punto ($x=a$, $y=b$) ed il cui raggio è* r, *gli assi coordinati essendo obliquangoli.*

La proprietà caratteristica che definisce la circonferenza è quella di avere ogni suo punto equidistante dal centro. Pertanto, indicando con θ l'angolo degli assi e con x e y le coordinate di un punto qualunque della curva, la distanza di questo dall'origine eguaglia il raggio r; cosicchè l'equazione cercata è (n.° 7)

(1) $$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\theta.$$

Se gli assi coordinati sono ortogonali si ha $\theta=90^0$ e l'equazione diviene

(2) $$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2$$

Se il centro del circolo coincide coll'origine abbiamo $a=0$ e $b=0$, e le equazioni (1) e (2) si trasformano nelle seguenti

(3) $$r^2=x^2+y^2+2xy\cos\theta,\qquad (4)\quad r^2=x^2+y^2.$$

Problema II. *Trovare in coordinate polari l'equazione della circonferenza del circolo il cui centro è nel punto* ($\rho=d, \varphi=\alpha$) *ed il cui raggio è* r.

Designando con ρ e φ le coordinate polari di un punto qualunque della circonferenza, la sua distanza dal centro eguaglia il raggio r e perciò (n.° 7) l'equazione cercata è

(5) $$r^2=\rho^2+d^2-2\rho d\cos(\alpha-\varphi).$$

Se l'asse polare passa pel centro o $\alpha=0$, l'equazione diventa

(6) $$r^2=\rho^2+d^2-2\rho d\cos\varphi.$$

Quando si prende per polo il centro abbiamo

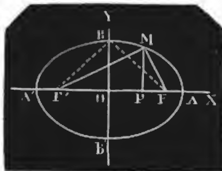
(7) $$r=\rho.$$

Ellisse.

11. *L'ellisse è una curva tale che la somma delle distanze di ogni suo punto a due punti fissi, dati di posizione nel piano, eguaglia una data lunghezza.*

Problema I. *Determinare l'equazione dell'ellisse in coordinate rettilinee.*

Si ponga l'origine delle coordinate di un sistema d'assi ortogonali nel punto di mezzo O della retta congiungente i punti fissi F e F', e si prenda questa per asse delle x e la sua perpendicolare in O per asse delle y. Indicando con $2a$ la lunghezza data, con $2c$ la distanza F F' dei due punti fissi, con (x=OP, y=MP) un punto qualunque M della curva si ha per definizione



$$MF+MF'=2a:$$

e quindi, dai triangoli rettangoli MPF e MPF' avendo $MF=\sqrt{y^2+(c-x)^2}$ e $MF'=\sqrt{y^2+(c+x)^2}$, si ottiene per l'equazione della curva

$$\sqrt{y^2+(c-x)^2}+\sqrt{y^2+(c+x)^2}=2a.$$

Per eliminare i radicali trasportiamone il primo nel secondo membro e semplicizziamo, avremo

$$a\sqrt{y^2+(c-x)^2}=a^2-cx,$$

e di nuovo elevando a quadrato ed ordinando

$$a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=a^2(a^2-c^2),$$

ovvero, ponendo $a^2-c^2=b^2$ il che è sempre possibile per essere $2a>2c$,

$$(1) \qquad a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

I punti fissi F e F' chiamansi *fuochi* dell'ellisse, la retta AA' con-

dotta per essi e terminata al perimetro *asse maggiore*, il punto O *centro* dell'ellisse, la perpendicolare BB′ condotta pel centro all'asse maggiore e terminata al perimetro *asse minore:* i quattro punti dove gli assi incontrano la curva ne sono i *vertici.*

Congiungendo il punto B con i fuochi sarà evidentemente $BF'=BF=a$ e perciò $BO^2=a^2-c^2=b^2$: dunque b è il semi-asse minore della curva.

Problema II. *Determinare in coordinate polari l' equazione della ellisse.*

Si prenda per polo il fuoco F′ e per direttrice F′F: essendo $M(\rho,\varphi)$ un punto qualunque della curva, dal triangolo MFF′ si trae

$$MF^2=MF'^2+FF'^2-2MF'\times FF' \cos MF'F.$$

Ma abbiamo $MF'=\rho$, $MF'F=\varphi$, $FF'=2c$ e $MF=2a-\rho$: quindi, sostituendo e riducendo, si giunge all'equazione $\rho(a-c\cos\varphi)=b^2$, o

$$(2)\qquad \rho=\frac{\left(\frac{b^2}{a}\right)}{1-\frac{c}{a}\cos\varphi}=\frac{p}{1-e\cos\varphi}.$$

La quantità $2p=\frac{2b^2}{a}$ si chiama *parametro* dell'ellisse, e l'altra $e=\frac{c}{a}$ la sua *eccentricità.*

Iperbola.

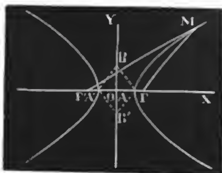
12. *L' iperbola è una curva tale che la differenza delle distanze di ciascuno de' suoi punti a due punti fissi, dati di posizione nel piano, è costante.*

Problema I. *Determinare l' equazione dell' iperbola in coordinate rettilinee.*

Procedendo col metodo adoperato (n.° 11) per stabilire l'equazione della ellisse, dalla fondamentale relazione

$$MF'-MF=2a$$

si ottiene



$$\sqrt{y^2+(x+c)^2}-\sqrt{y^2+(x-c)^2}=2a;$$

ovvero, dopo avere da essa eliminati i radicali,

$$a^2y^2-(c^2-a^2)x^2=-a^2(c^2-a^2):$$

ponendo $c^2-a^2=b^2$, il che è sempre possibile perchè $2c>2a$, si perviene alla seguente equazione della curva

$$(1)\qquad a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2.$$

I punti fissi F e F' chiamansi *fuochi*, la retta AA' *asse trasverso*, le sue estremità A e A' *vertici*, e il punto O *centro* dell' iperbola.

Innalzando dal centro una perpendicolare all' asse trasverso e costruendo una losanga avente per una delle diagonali quest' asse e per lato la lunghezza c, l' altra diagonale è su tale perpendicolare ed eguaglia $2b$: infatti dal triangolo rettangolo AOB si ricava $OB^2=c^2-a^2=b^2$ e perciò $BB'=2b$. Questa retta BB' che non incontra la curva chiamasi *asse immaginario.*

Problema II. *Determinare in coordinate polari l' equazione della iperbola.*

Prendiamo per direttrice l' asse trasverso e per polo il fuoco F'. Considerando un punto qualunque della curva $M(\rho,\varphi)$ dal triangolo MFF' si ha

$$MF^2=MF'^2+FF'^2-2MF'\times FF'\cos MF'F, \text{ ovvero}$$

$$(\rho-2a)^2=\rho^2+4c^2-4\rho c\cos\varphi,$$

e sviluppando e riducendo

$$\rho(c\cos\varphi-a)=b^2,$$

e finalmente

$$(2)\qquad \rho=\frac{\left(\frac{b^2}{a}\right)}{\frac{c}{a}\cos\varphi-1}=\frac{p}{e\cos\varphi-1}.$$

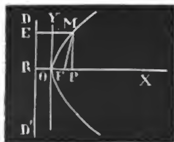
La quantità $2p=\frac{2b^2}{a}$ nominasi *parametro* e $e=\frac{c}{a}$ *eccentricità* della iperbola.

Parabola.

13. *La parabola è una curva di cui ogni punto è ad eguale distanza da una retta e da un punto fissi e dati di posizione nel piano.*

PROBLEMA I. *Determinare in coordinate rettilinee l'equazione della parabola.*

Sia F il punto fisso e DD' la retta data. Condotta da F la perpendicolare FR alla retta DD' si ponga l'origine delle coordinate nel suo punto di mezzo O, si prenda per asse delle x la retta OF e per quello delle y la perpendicolare a questa. Posto FR$=2p$ ed essendo M un punto qualunque della curva, per la relazione fondamentale che la definisce MF$=$ME$=$PR$=p+x$, e dal triangolo rettangolo MFP si ottiene l'equazione cercata



$$(p+x)^2=y^2+(x-p)^2,$$

ovvero, sviluppando e riducendo,

(1) $$y^2=4px.$$

Il punto fisso F si dice *fuoco* della parabola e *direttrice* o *linea della sublimità* la retta data DD': la perpendicolare condotta pel fuoco alla direttrice si nomina *asse* e *vertice* il punto ove essa taglia la curva. Infine il *parametro principale* $4p$ della parabola si definisce la quadrupla distanza del fuoco dal vertice.

PROBLEMA II. *Determinare in coordinate polari l'equazione della parabola.*

Prendendo il fuoco per polo e l'asse della curva per asse polare, dalla relazione MF$=$FR$+$FP si ha immediatamente l'equa-

zione richiesta $\rho = 2p + \rho \cos\varphi$, ovvero

$$(2) \qquad \rho = \frac{2p}{1 - \cos\varphi}.$$

14. Per illustrare completamente il metodo per cui ogni linea tracciata in un piano, la quale ammetta una geometrica descrizione, può rappresentarsi mediante una equazione fra le coordinate, rettilinee o polari, di uno qualunque de' suoi punti e fra quantità costanti, dipendenti dalla sua grandezza, e posizione fa d'uopo aggiungere altri esempi a quelli precedentemente svolti.

Cissoide di Diocle.

15. *Data una circonferenza ed in questa un punto* A, *preso per origine, e condotta per l'estremità* A′ *del diametro che passa per* A *una tangente* TT′, *la curva di cui ogni punto* M *è distante dall'origine* A *di una lunghezza eguale al segmento* RS *della retta* AM *compreso fra la circonferenza e la tangente si nomina cissoide.*

Problema I. *Determinare in coordinate rettilinee l'equazione della cissoide.*

Si ponga in A l'origine delle coordinate e si prenda per asse delle x il diametro AA′, e la sua perpendicolare YAY′ per quello delle y: sia $M(x,y)$ un punto qualunque della curva e R e S i punti ove la AM taglia la circonferenza e la tangente.



L'equazione della curva si determina esprimendo per mezzo del raggio r della circonferenza data e delle coordinate del punto M l'eguaglianza AM=RS.
Pertanto abbiamo evidentemente $AM=\sqrt{x^2+y^2}$, e dalla Geometria elementare (Legendre *pr.* 30, *lib.* III) si deduce il valore $RS=\frac{A'S^2}{AS}$ dal quale, ricavando dai triangoli simili ASA′ e AMP le es-

pressioni

$$A'S=\frac{AA'.MP}{AP}=\frac{2ry}{x}, \text{ e } AS=\frac{AA'.AM}{AP}=\frac{2r\sqrt{x^2+y^2}}{x},$$

si ottiene $RS=\frac{2\,r\,y^2}{x\sqrt{x^2+y^2}}$: quindi la relazione fondamentale ci dà l'equazione

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2\,r\,y^2}{x\sqrt{x^2+y^2}},$$

ovvero

(1) $$(x^2+y^2)x-2\,r\,y^2=0.$$

Problema II. *Determinare in coordinate polari l'equazione della cissoide.*

Sia A il polo, AA' l'asse polare e M (ρ, φ) un punto qualunque della curva. Condotta la corda A'R, dai triangoli rettangoli ASA' e ARA' si deducono le espressioni

$$AS=\frac{AA'}{cos\varphi}=2\,r\;sec\;\varphi, \text{ e } AR=AA'cos\varphi=2r\;cos\varphi.$$

che, sostituite nella relazione AM=RS=AS—AR, danno l'equazione della curva

(2) $$\rho=2\,r\,sec\,\varphi-2\,r\,cos\,\varphi=\frac{2r\;sen^2\,\varphi}{cos\,\varphi}.$$

Questa curva fu immaginata da Diocle, geometra greco che fiorì nel secolo 6.° dell'era cristiana, per l'oggetto di costruire due medie proporzionali fra due date lunghezze.

Ovali di Descartes.

Chiamasi ovale di Descartes la curva, di cui ogni punto M *è a distanze* MF *e* MF', *da due punti fissi* F *e* F', *tali da soddisfare alla relazione* $\lambda MF\pm\mu MF'=a$, *nella quale* λ, μ, a *sono numeri positivi dati.*

Problema I. *Determinare in coordinate rettilinee l'equazione dell'ovale cartesiano.*

Usando il metodo tenuto per l'ellisse (n.° 11) si ha l'equazione

$$\lambda\sqrt{y^2+(c-x)^2}\pm\mu\sqrt{y^2+(c+x)^2}=a,$$

la quale, eliminati i radicali, diviene

$$\left[(y^2+x^2+c^2)(\lambda^2-\mu^2)-2cx(\lambda^2+\mu^2)\right]^2-2a^2\left[(y^2+x^2+c^2)(\lambda^2+\mu^2)\right.$$
$$\left.-2cx(\lambda^2-\mu^2)\right]+a^4=0,$$

ovvero

$$\left[\lambda^2\left(y^2+(x-c)^2\right)-\mu^2\left(y^2+(x+c)^2\right)\right]^2-2a^2\left[\lambda^2\left(y^2+(x-c)^2\right)\right.$$
$$\left.+\mu^2\left(y^2+(x+c)^2\right)\right]+a^4=0$$

Problema II. *Determinare in coordinate polari l'equazione dell'ovale cartesiano.*

Prendendo F' per polo e F'F per asse polare, dal triangolo MFF' si deduce la relazione

$$\mathrm{MF}^2=\mathrm{MF'}^2+\mathrm{FF'}^2-2\,\mathrm{MF'}\times\mathrm{FF'}\cos\mathrm{MF'F},$$

dalla quale, fatte le sostituzioni, si ottiene l'equazione polare richiesta, cioè

$$(a\mp\mu\rho)^2=\lambda^2(\rho^2+4c^2-4\rho c\cos\varphi).$$

Se $\lambda=\mu$ l'ovale cartesiano si trasforma in una ellisse od in una iperbola secondo che il secondo termine dell'eguaglianza $\lambda\mathrm{MF}\pm\mu\mathrm{MF'}=a$ è positivo o negativo.

17. **Teorema.** *Ogni equazione algebrica o trascendente $f(x,y)=0$, che sussiste fra le coordinate variabili x e y di un punto qualunque, esprime sempre una curva, la quale è il* luogo geometrico *dei punti che hanno per coordinate coppie di valori di x e di y atti a soddisfarla.*

Assumendo per la x un valore arbitrario α, l'equazione $f(\alpha, y)=0$ da il modo di determinare per y valori corrispondenti a questo particolare valore di x, i quali sono in numero finito se l'equazione è algebrica ed in generale infinito se trascendente: perciò dalla equazione $f(x, y)=0$ sarà rappresentato il sistema di punti la cui ascissa comune è α e le cui ordinate sono i valori di y tratti da $f(\alpha, y)=0$. Prendendo poi per x un'altro valore arbitrario α' si avrà parimente un'altra serie di punti le coordinate dei quali soddisfanno alla data equazione. Simili risultati otterremo per altri valori α'', α''',... dati alla x.

Pertanto, se x prende successivamente tutti i valori da $+\infty$ a $-\infty$, passando da $+\infty$ ad α, ad α', ad α'' ec. continuamente per tutti i valori intermedi, l'insieme delle serie dei punti così ottenuti forma una curva ogni punto della quale soddisfa alle condizioni poste dall'equazione data e che perciò ne è la geometrica rappresentazione.

Esercizi.

I. Trovare le lunghezze dei lati di un triangolo, date le coordinate dei suoi vertici $(x_1=-2, y_1=1)$, $(x_2=3, y_2=-4)$, e $(x_3=7, y_3=3)$, quando gli assi sono ortogonali e quando formano un'angolo di 30.°

II. Date le coordinate dei vertici di un triangolo, trovare quelle del punto d'incontro delle mediane.

III. Unito il vertice di un triangolo col punto del lato opposto in cui questo è diviso in due segmenti che stanno fra loro nel rapporto $m:n$, trovare le coordinate del punto in cui la congiungente è divisa in due parti aventi il rapporto $m+n:l$.

IV. Siano dati in un piano m punti A_1 (x_1, y_1), A_2 (x_2, y_2)... A_m (x_m, y_m) e si conoscano altrettanti numeri $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$. Con-

giunto A_1 con A_2 si determini sulla congiungente il punto P_1 in modo che si abbia $A_1P_1 : P_1A_2 :: \beta_2 : \beta_1$; quindi si unisca P_1 con A_3 e si divida P_1A_3 nel punto P_2 per modo che si abbia $P_1P_2 : P_2A_3 :: \beta_3 : \beta_1 + \beta_2$; similmente si divida la retta P_2A_4 nel punto P_3 secondo il rapporto $\beta_4 : \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ e si proceda con questa legge fino all'ultimo punto dato A_m. Trovare le coordinate dell'ultimo punto di divisione P_{n-1}, il quale si nomina *centro delle distanze proporzionali* a $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ e *centro delle medie distanze* quando $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m$.

V. Determinare in coordinate rettilinee e polari le equazioni della *ovale di Cassini*. In questa curva il rettangolo delle distanze di ogni punto a due punti fissi F e F', dati di posizione nel piano, eguaglia un quadrato dato a^2.

Preso un sistema di assi ortogonali avente per origine il punto di mezzo O di $FF' = 2c$ e per asse delle ascisse FF', l'equazione in coordinate rettilinee è $(y^2 + x^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = a^4$.

Essendo FF' l'asse polare ed O il polo si trova $\rho^4 - 2\rho^2c^2 \cos 2\varphi + c^4 = a^4$ per l'equazione in coordinate polari.

VI. Determinare in coordinate rettilinee e polari l'equazione della *concoide di Nicomede*. Questa è una curva in cui, essendo dati di posizione nel piano un punto O ed una retta AA', congiunto con O un suo punto qualunque M, il segmento MT di questa retta OM compreso fra M ed il punto T ove sega la retta fissa eguaglia una lunghezza data.

Questa curva fu immaginata da Nicomede, geometra greco che si crede fiorisse fra il 3.° e il 1.° secolo avanti l'era volgare, per la risoluzione del problema delle due medie proporzionali.

VII. Determinare in coordinate rettilinee e polari l'equazione della curva nella quale, essendo dato di posizione nel piano un'angolo retto AOA_1, condotta una perpendicolare da un suo punto qua-

lunque M alla retta OM, che lo unisce col vertice dell'angolo retto, il segmento della perpendicolare compreso fra i lati OA e OA_1 eguaglia una lunghezza data.

VIII. Dato un'angolo retto AOA_1 ed un punto A_1 sopra uno dei suoi lati, determinare in coordinate rettilinee e polari l'equazione della curva nella quale, congiunto un suo punto qualunque M col punto fisso A_1, il segmento MT compreso fra M e il punto T, nel quale la retta congiungente MA_1 taglia il lato OA eguaglia in valore assoluto il segmento OT.



CAPITOLO II.

Trasformazione delle coordinate.



18. Alcune delle quantità costanti che entrano nell'equazione di una curva riferita ad un noto sistema di assi coordinati, o ad un sistema polare, dipendono soltanto dalla sua forma e dalla sua grandezza; altre dalla relativa posizione della curva e degli assi o del sistema polare. Così nell'equazione generale (n.° 10) della circonferenza il raggio r dipende unicamente dalla natura di questa e le coordinate, rettilinee o polari, del centro dalla posizione che questo occupa nel piano. Però, la scelta di un sistema d'assi essendo in generale arbitraria, la medesima curva, mutate le coordinate, potrà essere rappresentata da infinite equazioni differenti fra le quali potremo eleggere quella che meglio convenga a svelarne la natura e le proprietà. Per conseguir ciò, nota essendo l'equazione di una curva per un dato sistema di coordinate, fa d'uopo dedurne un'altra la quale esprima la medesima curva riferita ad altro sistema pur noto. Il metodo generale consiste nell'esprimere, per un punto qualunque, i valori delle coordinate primitive in funzione delle nuove e nel sostituirli nella proposta equazione, la quale con ciò si trasforma in altra che del pari conviene ai medesimi punti.

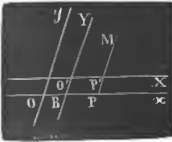
19. Le relazioni sussistenti fra le primitive e le nuove coordinate si nominano *formule di trasformazione*.

Per stabilirle quando i sistemi sono di coordinate rettilinee dobbiamo considerare i tre casi seguenti: 1.° *cambiare l'origine mantenendo invariata la direzione degli assi*; 2.° *cangiare la direzione degli assi tenendo la medesima origine*; 3.° *cambiare l'origine e la*

direzione degli assi. Per sistemi rettilinei e polari i casi sono due, cioè; 1.° *cambiare le coordinate rettilinee in polari*; 2.° *mutare inversamente le coordinate polari in rettilinee.*

Sistemi di coordinate rettilinee.

20. 1.° *Caso.* Siano Ox e Oy gli assi primitivi e le rette O'X e O'Y, respettivamente parallele ad essi, siano i nuovi assi: s'indichino con $(x_0=OB, y_0=O'B)$ le coordinate della nuova origine riferita al primo sistema. Rappresentando con $(x=OP, y=MP)$, $(X=O'P', Y=MP')$ le coordinate di un punto qualunque M relativamente al primo ed al secondo sistema, si ha



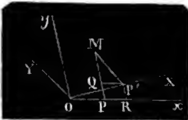
$$OP=OB+O'P',\quad MP=O'B+MP',$$

ovvero

$$(1)\qquad \begin{cases} x=x_0+X, \\ y=y_0+Y. \end{cases}$$

Queste rimangono egualmente vere qualunque sia l'angolo che comprendono gli assi.

21. 2.° *Caso.* Siano Ox e Oy gli assi primitivi e $xOy=\theta$ l'angolo da essi formato: siano OX e OY i nuovi assi e $XOx=\alpha$, $YOx=\beta$ gli angoli che fanno col primitivo asse delle x. Si rappresentino con $(x=OP, y=MP)$, $(X=OP', Y=MP')$ le coordinate di un punto qualunque M relativamente al primo e al secondo sistema; da P' si conduca una parallela ad Ox fino al punto Q nel quale incontra la MP ed una pa-



rallela ad Oy fino in R ove taglia Ox. Per tale costruzione evidentemente si hanno le espressioni

(a) $$OP = OR - QP', \quad MP = MQ + P'R.$$

Osservando che $P'OR = \alpha$, $P'RO = 180^0 - \theta$, e $OP'R = \theta - \alpha$, dal triangolo $OP'R$ si trae

$$OR = \frac{X\, sen\, (\theta - \alpha)}{sen\, \theta}, \quad P'R = \frac{X\, sen \alpha}{sen\, \theta}:$$

in simil modo, essendo $MQP' = \theta$, $MP'Q = 180^0 - \beta$, e $P'MQ = YOy = \beta - \theta$, dal triangolo MQP' si ha

$$QP' = \frac{Y\, sen\, (\beta - \theta)}{sen\, \theta} = -\frac{Y\, sen\, (\theta - \beta)}{sen\, \theta}, \quad MQ = \frac{Y\, sen\, \beta}{sen\, \theta}.$$

Quindi, sostituendo i valori trovati nelle espressioni (a), se ne deducono le formule

(1) $$\begin{cases} x = \dfrac{X\, sen\, (\theta - \alpha) + Y\, sen (\theta - \beta)}{sen\, \theta}, \\ y = \dfrac{X\, sen\, \alpha + Y\, sen\, \beta}{sen\, \theta}. \end{cases}$$

Nell' uso di queste formule conviene definire esattamente quali segni debbano attribuirsi agli angoli in esse contenuti. Gli angoli $xOy = \theta$, $xOX = \alpha$, e $xOY = \beta$ hanno il segno positivo quando sono diretti dalla medesima parte di Ox, e gli angoli $yOx = \theta$, $yOX = \theta - \alpha$, e $yOY = \theta - \beta$ sono positivi quando son volti dalla medesima parte di Oy: perciò, se nella prima o nella seconda serie alcuno degli angoli è volto dalla parte opposta al primo, è necessario attribuirgli il segno negativo. Si osservi che l' angolo θ può ricevere tutti i valori compresi fra 0^0 e $+180^0$, mentre i valori di α e di β sono fra -180^0 e $+180^0$.

Dalle formule (1) si deducono immediatamente quelle che convengono al problema inverso, di ritornare cioè dal nuovo al primitivo sistema di assi. Infatti basta cambiare in esse x e y in X e Y e reciprocamente; quindi θ in $\beta - \alpha$, perchè all' angolo xOy si deve sostituire quello formato dai nuovi assi; poscia α in $-\alpha$

e β in $\theta-\alpha$, perchè agli angoli che i nuovi assi fanno con Ox corrispondono quelli che i primitivi fanno con OX, e finalmente, per ciò che abbiamo ora osservato, cambiare $\theta-\alpha$ in β e $\theta-\beta$ in $\beta-\theta$. Quindi le formule richieste sono

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} X&=\frac{x \operatorname{sen}\beta+y\operatorname{sen}(\beta-\theta)}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)},\\ Y&=\frac{-x\operatorname{sen}\alpha+y\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}.\end{aligned}\right.$$

In alcune particolari circostanze le formule (1) e (2) divengono più semplici:

1.° Quando gli assi primitivi sono ortogonali, ossia $\theta=90^\circ$, e gli altri obliquangoli, esse si riducono alle seguenti

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=X\cos\alpha+Y\cos\beta,\\ y&=X\operatorname{sen}\alpha+Y\operatorname{sen}\beta;\end{aligned}\right.$$

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} X&=\frac{x\operatorname{sen}\beta-y\cos\beta}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)},\\ Y&=\frac{-x\operatorname{sen}\alpha+y\cos\alpha}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}:\end{aligned}\right.$$

2.° Se gli assi primitivi sono obliquangoli e gli altri ortogonali, cioè $\beta=90^\circ+\alpha$, le formule generali si trasformano nelle

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=\frac{X\operatorname{sen}(\theta-\alpha)-Y\cos(\theta-\alpha}{\operatorname{sen}\theta},\\ y&=\frac{X\operatorname{sen}\alpha+Y\cos\alpha}{\operatorname{sen}\theta};\end{aligned}\right.$$

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} X&=x\cos\alpha+y\cos(\theta-\alpha),\\ Y&=-x\operatorname{sen}\alpha+y\operatorname{sen}(\theta-\alpha):\end{aligned}\right.$$

3.° Ambedue i sistemi essendo ortogonali si hanno le formule

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=X\cos\alpha-Y\operatorname{sen}\alpha,\\ y&=X\operatorname{sen}\alpha+Y\cos\alpha;\end{aligned}\right.$$

$$(8)\qquad \begin{cases} X = x\cos\alpha + y\,sen\,\alpha, \\ Y = -x\,sen\,\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

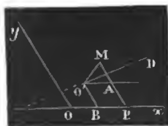
22. 3.° *Caso.* Essendo yOx il primitivo sistema di assi e YO′X il nuovo, condotte da O′ le rette O′B e O′A respettivamente parallele ad Ox e Oy, si effettuerà questa generale trasformazione cambiando primieramente l'origine col sostituire il sistema AO′B al primitivo, e poi la direzione col passare da AO′B al nuovo sistema YO′X mediante le formule (1) del n.° 20 e (1) del n.° 21. Quindi, ritenute le notazioni di sopra usate per le coordinate di O′ e per gli angoli yOx, XO′B e YO′B, avremo per le formule di trasformazione proprie a questo caso



$$(1)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \dfrac{X\,sen\,(\theta-\alpha) + Y\,sen\,(\theta-\beta)}{sen\,\theta}, \\[2ex] y = y_0 + \dfrac{X\,sen\,\alpha + Y\,sen\,\beta}{sen\,\theta}. \end{cases}$$

Sistemi di coordinate rettilinee — polari.

23. 1.° *Caso.* Dato un sistema di assi coordinati comprendenti fra loro un' angolo $yOx = \theta$, e dato un sistema polare avente il polo nel punto O′ (x_0, y_0) e per direttrice la retta O′D che forma con O′A, parallela ad Ox, l'angolo DO′A$=\alpha$, si vogliono esprimere le coordinate rettilinee di un punto M (x, y) in funzione delle sue coordinate polari O′M$=\rho$ e MO′D$=\varphi$ e delle quantità



note x_0, y_0, θ, α. Abbiamo evidentemente

$$OP=OB+O'A,\ MP=O'B+MA;$$

e dal triangolo MO'A si deduce

$$O'A=\frac{O'M\ sen\ O'MA}{sen\ O'AM}=\frac{\rho\ sen\ (\theta-\alpha-\varphi)}{sen\ \theta},\ MA=\frac{O'M\ sen\ MO'A}{sen\ O'AM}=\frac{\rho\ sen\ (\alpha+\varphi)}{sen\ \theta};$$

quindi, fatte le sostituzioni, si hanno le formule generali richieste

$$(1)\qquad \begin{cases} x=x_0+\dfrac{\rho\ sen\ (\theta-\alpha-\varphi)}{sen\ \theta}, \\ y=y_0+\dfrac{\rho\ sen\ (\alpha+\varphi)}{sen\ \theta}. \end{cases}$$

Si osservi che α può ricevere tutti i valori fra 0^0 e 180^0. Quando il primitivo sistema di assi è ortogonale si ha $\theta=90^0$, e perciò

$$(2)\qquad \begin{cases} x=x_0+\rho\ cos\ (\alpha+\varphi), \\ y=y_0+\rho\ sen\ (\alpha+\varphi). \end{cases}$$

Se inoltre l'asse polare è parallelo ad Ox, ovvero $\alpha=0$, le formule si riducono alla forma più semplice

$$(3)\qquad \begin{cases} x=x_0+\rho\ cos\ \varphi, \\ y=y_0+\rho\ sen\ \varphi: \end{cases}$$

le quali, quando il polo coincide con la origine, diventano

$$(4)\qquad \begin{cases} x=\rho\ cos\ \varphi, \\ y=\rho\ sen\ \varphi. \end{cases}$$

24. 2.° *Caso.* Per trattare il problema inverso, quello cioè di esprimere le coordinate polari di un punto qualunque per mezzo delle rettilinee, riterremo le notazioni precedenti. Per la formula che dà la distanza di due punti in funzione delle loro coordinate rettilinee (n.° 7) immediatamente si ha ρ; e dalle formule (1) del n.° 23,

eliminando ρ, si ha l'espressione di $tang\,(\alpha+\varphi)$: quindi abbiamo

$$(1)\qquad \begin{cases} \rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+2\,(x-x_0)\,(y-y_0)\cos\theta}, \\ tang\,(\alpha+\varphi)=\dfrac{(y-y_0)\,sen\,\theta}{(x-x_0)+(y-y_0)\cos\theta}. \end{cases}$$

Queste formule di trasformazione non sono mai adoperate in tutta la loro generalità. Allorchè il sistema rettilineo è ortogonale, ovvero $\theta=90^0$, se ne ricavano le seguenti

$$(2)\qquad \begin{cases} \rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \\ tang\,(\alpha+\varphi)=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}. \end{cases}$$

Quando inoltre l'asse polare è parallelo a quello delle x, cioè $\alpha=0$, abbiamo

$$(3)\qquad \begin{cases} \rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \\ tang\,\varphi=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}. \end{cases}$$

dalle quali, se di più il polo coincide coll'origine del sistema retlineo, si deducono le seguenti di forma più semplice e più usata

$$(4)\qquad \begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2}, \\ tang\,\varphi=\dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Esercizj.

I. Data la relazione $x^2+y^2-4x+15y=12$ a cui soddisfano le coordinate di un punto, determinare quella in cui essa si trasforma trasportando l'origine degli assi coordinati nel punto ($x=2$, $y=7,5$).

II. Le coordinate di un punto in un sistema di assi ortogonali

soddisfano alla relazione $y^2-x^2=18$, determinare ciò che questa diviene prendendo per nuovi assi le bissettrici degli angoli compresi fra gli assi primitivi.

III. Trasformare l'equazione $7x^2-12xy+7y^2=23$ da un sistema di assi, comprendenti un angolo di 60°, in un sistema formato dalle bissettrici degli angoli compresi dagli assi primitivi.

IV. Trasformare l'equazione $y^2+1,5xy-x^2+7x-9y=12$ da un sistema di assi che fanno un'angolo di 60°, ad un sistema di assi ortogonali conservando il primitivo asse delle x.

V. Date le coordinate x, y di un punto qualunque riferito al primitivo sistema di assi xOy ($xOy=\theta$), e quelle X, Y riferito ad un nuovo sistema XOY (XOY$=\Theta$), dimostrare che sussiste la relazione:

$$x^2+y^2+2xy\cos\theta=X^2+Y^2+2XY\cos\Theta.$$

VI. Trasformare l'equazione $16x^2-25y^2=144$ da un sistema ortogonale ad un sistema obliquangolo tale che il nuovo asse delle x faccia col primitivo un'angolo la cui tangente trigonometrica equagli 0,8 ed il nuovo asse delle y faccia col primitivo asse delle x un' angolo la cui tangente trigonometrica sia eguale a $-0,8$.

VII. Trasformare le equazioni

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2, \qquad a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$$

riferite ad assi ortogonali in coordinate polari, situando il polo nell'origine del primitivo sistema e prendendo per asse polare l'asse delle x.

VIII. Date le seguenti equazioni:

$4(x^2-y^2)-25=0,\qquad y^3-36xy+x^3=0,$

$y^2(7-x)-x^3=0,\qquad y^2(x+4)-x(x-4)(x+5)=0,$

$(x^2+y^2+16)^2-64x^2-256=0,\qquad y^4-2x(x-7)y^2-x^4-35x^3=0$

in coordinate rettilinee ortogonali, trasformarle in coordinate polari ponendo il polo nell'origine del primitivo sistema e prendendo per asse polare l'asse delle x.

IX. Trasformare da coordinate rettilinee obliquangole (essendo θ l'angolo degli assi) in coordinate polari le seguenti equazioni:

$$3x^2 \pm 4y^2 = 12\ (\theta=60^0);\ xy=25\ (\theta=54^0);$$
$$y^2(y^2-16)+x^2(25-x)=0\ (\theta=45^0);$$

situando il polo nell'origine del primitivo sistema e prendendo per asse polare l'asse delle x.

X. Trasformare da coordinate polari in coordinate rettilinee ortogonali le sotto notate equazioni, ponendo l'origine del nuovo sistema nel polo e prendendo per asse delle x l'asse polare:

$\rho^2\ sen\ 2\varphi=72,\qquad \rho=3(2\cos\varphi-5\ sen\ \varphi),$

$\rho^2=25\cos 2\varphi,\qquad \rho=3\cos\varphi-2\ sen\ \varphi,$

$\sqrt{\rho}\cos\frac{\varphi}{2}=5,\qquad \rho(1-sen\ 2\varphi)=11\cos\varphi,$

$\sqrt{\rho}=7\cos\frac{\varphi}{2},\qquad \rho\cos^2\varphi=1.$

XI. Trasformando l'equazione

$$(1)\qquad Ax^2+Bxy+Cy^2=H$$

da un sistema di assi Ox, Oy, $(xOy=\theta)$, ad un nuovo sistema OX, OY, $(XOY=\Theta)$, le quantità

$$\frac{A+C-B\cos\theta}{sen^2\theta},\qquad \frac{B^2-4AC}{sen^2\theta}$$

rimangono invariate, ovvero, rappresentando con

$$A_1X^2+B_1XY+C_1Y^2=H$$

la trasformata della equazione (1) si hanno le relazioni

$$(2)\qquad \frac{A+C-B\cos\theta}{sen^2\theta}=\frac{A_1+C_1-B_1\cos\Theta}{sen^2\Theta}\,;\quad \frac{B^2-4AC}{sen^2\theta}=\frac{B_1^2-4A_1C_1}{sen^2\Theta}.$$

La diretta dimostrazione di questo Teorema fondata sull'uso delle formule di trasformazione esige calcoli assai laboriosi; perciò è da preferirsi la seguente dovuta al Prof. Boole.

Le quantità $x^2+2xy\cos\theta+y^2$, $X^2+2XY\cos\Theta+Y^2$ esprimendo il quadrato della distanza di un punto M dall'origine O nell'uno e nell'altro sistema sono identiche; laonde anche le due quantità

$$\lambda(x^2+2xy\cos\theta+y^2)+(Ax^2+Bxy+Cy^2),$$
$$\lambda(X^2+2XY\cos\Theta+Y^2)+(A_1X^2+B_1XY+C_1Y^2),$$

nelle quali λ è una costante arbitraria suscettiva di ricevere un valore qualunque, sono parimente identiche in quantochè traducono in ambo i sistemi la formula λOM^2+H. Pertanto eguagliandole ed ordinando si ottiene:

$$(a)\qquad x^2(\lambda+A)+xy(2\lambda\cos\theta+B)+y^2(\lambda+C)$$
$$=X^2(\lambda+A_1)+XY(2\lambda\cos\Theta+B_1)+Y^2(\lambda+C_1).$$

E se si attribuisce a λ un tale valore per il quale il primo membro di questa identità divenga un quadrato perfetto, esso deve evidentemente rendere anche il secondo membro un quadrato perfetto. In conseguenza le due equazioni di secondo grado

$$\lambda^2+\frac{A+C-B\cos\theta}{sen^2\theta}\lambda-\frac{B^2-4AC}{sen^2\lambda}=0$$

$$\lambda^2+\frac{A_1+C_1-B_1\cos\Theta}{sen^2\Theta}\lambda-\frac{B_1^2-4A_1C_1}{sen^2\Theta}=0,$$

le quali esprimono le condizioni affinché ambo i membri della (a) sieno quadrati perfetti, devono dare i medesimi valori per λ e perciò devono identificarsi. Quindi eguagliando i coefficienti dei termini corrispondenti si ottengono le relazioni (2).

CAPITOLO III.

Classificazione delle linee.



25. Ogni linea si può sempre considerare generata da un punto che si muova, il suo movimento essendo altronde definito da leggi costanti e note: e la equazione di essa si stabilisce deducendo dal dato modo di generazione la relazione analitica che invariabilmente deve collegare le coordinate appartenenti ad un suo punto qualunque. Questo metodo che di frequente si adopera onde pervenire alla equazione di una linea solo apparentemente differisce da quello sviluppato nel n.° 8. poichè dalla natura del moto con cui il punto generatore la descrive si può ricavare una sua generale proprietà. Così la circonferenza del circolo si genera da un punto il quale si muove in guisa che la sua distanza da un punto fisso rimane invariata; la ellisse da un punto che nel suo moto sta da due punti fissi a tali distanze la cui somma rimane sempre costante; ed è evidente come la legge da cui dipende il moto del punto generatore somministri quella proprietà secondo la quale ciascuna di esse già si determinò. Nullameno è opportuno d'illustrare con esempi questa maniera di stabilire l'equazione di una linea in quanto che spesso il suo modo di generazione può esprimersi con semplicità grandissima assai più che la proprietà in esso involuta.

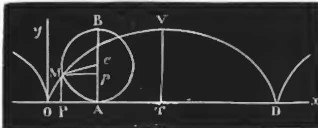
Cicloide.

26. *La Cicloide è una curva descritta da un punto posto nella*

circonferenza di un circolo mentre questo ruotando scorre lungo una retta fissa.

PROBLEMA. — *Determinare in coordinate rettilinee l' equazione della cicloide.*

Si prenda la retta fissa per asse delle x, e si ponga l'ori-



gine di un sistema ortogonale di assi in O ove il punto generatore M era sulla retta fissa Ox; sia AMB una posizione del circolo mobile di raggio eguale a R, e perciò M sia un punto della curva. Per la legge con cui si effettua il moto di M l'arco AM eguaglia in lunghezza la retta OA. Inoltre sia D il punto sulla retta Ox in cui il punto generatore M torna di nuovo a coincidere con essa di guisa che OAD eguaglia la lunghezza della circonferenza del circolo mobile. Si bissechi OD e in T suo punto di mezzo si inalzi la ordinata $TV=2R$; dalla generazione della curva V resulta il punto più alto di essa. Posto $OP=x$, $PM=y$, $MCp=\theta$, essendo OA= arco AM, si ottengono immediatamente le relazioni

$$(1) \qquad x=R(\theta-sen\,\theta),\ y=R(1-cos\,\theta).$$

dalle quali, eliminando l'angolo ausiliare θ, si deduce

$$(2) \qquad x=R\ arc\ sen\left(\frac{\sqrt{y(2R-y)}}{R}\right)-\sqrt{y(2R-y)}$$

per l'equazione della curva.

Siccome *sen* θ e *cos* θ pigliano i medesimi valori allorchè θ è aumentato di 2π, 4π, 6π, ... $2n\pi$ evidentemente apparisce come y

riceva valori che periodicamente si riproducono (il periodo è compreso fra 0 e 2R), mentre i valori di x fra $2(n-1)\pi R$ e $2n\pi R$ si formano da quelli del periodo precedente nel medesimo ordine, ciascuno di essi però aumentato di $2\pi R$: laonde la cicloide si compone di archi eguali ad OVD, a destra ed a sinistra dell'origine O.

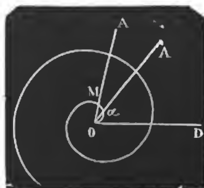
La retta OTD chiamasi *base*, la TV *altezza* ed il punto V *vertice* dell'arco cicloidale OVD.

Spirale di Archimede.

27. *La spirale di Archimede è una curva descritta da un punto che percorre con moto uniforme partendo da un punto fisso una retta mentre questa ruota uniformemente intorno ad esso.*

PROBLEMA — *Determinare in coordinate polari l'equazione della spirale di Archimede.*

Si ponga il polo nel punto fisso od origine O, e si prenda per direttrice la posizione iniziale della retta che ruota intorno ad O, con il quale il punto generatore M coincide. Sia a=Oa la lunghezza percorsa da M allorchè la retta OA ha descritto un angolo eguale alla unità; sia poi ρ la lunghezza del cammino percorso da M allorquando OA ha descritto l'angolo φ=MOD.



Per la data legge di generazione deve, per qualunque posizione di M, sussistere la relazione

$$\frac{OM}{Oa}=\frac{MOD}{aOD}$$

da cui si deduce $\rho=a\varphi$, equazione della curva.

28. Essendo nel sistema cartesiano le linee pienamente rappresentate dalle loro equazioni, fa d'uopo esporre alcune delle essenziali proprietà che queste godono.

In prima si supponga la equazione di una linea, algebrica, liberata da ogni irrazionalità, ridotta intera: allora la sua forma generale, m essendone il grado e $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ il numero dei termini, è

$$\begin{aligned} F(x,y)=A_0x^m+A_1x^{m-1}y+A_2x^{m-2}y^2+ \dots\dots\dots +A_my^m \\ +B_0x^{m-1}+B_1x^{m-1}y+ \dots\dots +B_{m-1}y^{m-1} \\ +C_0x^{m-2}+C_1x^{m-3}y+\dots +C_{m-2}y^{m-2} \\ + \dots\dots\dots\dots \\ +T_0x+T_1y \\ +U_0 \quad =0; \end{aligned}$$

ovvero $F(x,y)=U_0+U_1+U_2+\dots+U_m$, in cui U_0, U_1, $U_2 \dots U_m$ denotano respettivamente il termine costante, e funzioni omogenee di 1°, 2°, ... m^{esimo} grado in x e in y.

29. Teorema I. *Il grado* m *della equazione algebrica* $F(x,y)=0$ *rimane lo stesso qualunque sia il sistema di assi a cui essa è riferita.*

Essendo Ox, Oy ($xOy=\theta$) il primitivo sistema di assi e prendendo un nuovo sistema $O'X$, $O'Y$, determinato da $x=a$, $y=b$, e $XO'Y=\Theta$ si ottiene la trasformata sostituendo in $F(x,y)=0$, ad x e ad y, i loro valori* (n.° 22.)

$$x=a+\frac{sen\,(\theta-\alpha)}{sen\,\theta}X+\frac{sen\,(\theta-\beta)}{sen\,\theta}Y=a+a_1X+a_2Y,$$

ed

$$y=b+\frac{sen\,\alpha}{sen\,\theta}X+\frac{sen\,\beta}{sen\,\theta}Y=b+b_1X+b_2Y,$$

la quale trasformata perciò è $F(a+a_1X+a_2Y, b+b_1X+b_2)=0$. Questa non può risultare di grado superiore ad m: perchè U_m contenendo tutti i termini del grado il più elevato m di $F(x,y)$ e

$A_p x^{m-p} y^p$ essendo il suo termine generale, quello corrispondente nella equazione trasformata è

$A_p\left[a+a_1X+a_2Y\right]^{m-p}$ $\left[b+b_1X+b_2Y\right]^p$ dal quale evidentemente

non può derivare alcun termine il cui grado superi m. Nè può avere grando inferiore ad m poichè se ciò avvenisse, ritornando dai nuovi ai primitivi assi con inversa trasformazione, si dovrebbe di nuovo avere le proposta eqnazione, e perciò effettuando questo passaggio, aumenterebbe il grado della trarformata contro ciò che già si è stabilito.

30. Teorema II. *Considerando due linee rappresentate da equazioni algebiche fra coordinate rettilinee* $F_1(x, y)=0$, $F_2(x,y)=0$, *la prima del grado* m, *l'altra del grado* n, *il numero dei punti secondo cui esse possono intersecarsi non supera* mn.

Le coordinate di ogni punto d'intersezione dovendo soddisfare nel medesimo tempo ad ambo le date equazioni, per ottenerle fra queste si deve effettuare la eliminazione di una delle variabili, per esempio della x. La risultante $R(y)=0$, essendo di grado non superiore a mn, può dare solamente mn valori per la y, ed accoppiando ciascuno di questi col valore corrispondente della x si ottengono mn al più coppie di valori di x e y atti a soddisfare le proposte, e così mn punti.

Corollario I. Se una delle due linee, per esempio la seconda fosse una retta, l'equazione sua $F_2(x,y)=0$ dovendo essere di primo grado in x e y, o $F_2(x,y)=y-ax-b=0$ il numero delle intersezioni non può mai superare m. Infatti le risultante in x è $F_1(x,ax+b)=0$ equazione il cui grado è m, e le cui m radici $x=\alpha_1$, $x=\alpha_2$, ... $x=\alpha_m$ unite ai corrispondenti valori della y, $y=a\alpha_1+b$, $y=a\alpha_2+b$, ... $y=a\alpha_m+b$, determinano i punti di intersezione il numero reale dei quali dipende perciò dal numero delle radici reali della risultante.

Corollario II. Se si considerano una linea rappresentata in coordinate rettilinee da una equazione trascendente, ed una retta, il numero delle intersezioni, reali ed immaginarie, supera qualunque numero dato.

Dimostreremo questa proposizione supponendo l'ordinata o funzione esponenziale o trigonometrica dell'ascissa, gli altri casi potendo in generale trattarsi in identico modo.

1.° Sia $y=a^x$ la linea data, $x=\frac{1}{\beta}$ la retta, β essendo una costante arbitraria suscettiva di divenire maggiore di qualunque quantità assegnabile, i punti d'intersezione dipendono dalla risultante $y=\sqrt[\beta]{a}$, la quale ammette tante radici, reali ed immaginarie, quante unità sono in β. Pertanto le intersezioni della retta colla curva aumentano con β, ed il loro numero diviene insieme con β maggiore di qualunque numero dato.

2.° Sia $y=sen\,x$ la curva, ed $y=0$ la retta; l'equazione risultante $sen\,x=0$, ammettendo le radici $-n\pi,\ldots -\pi,\ 0,\ \pi,\ \ldots\ n\pi$ (n essendo un intero qualunque) il numero dei punti d'intersezione $(y=0, x=0)\ldots(y=0, x=\pm n\pi)$ è anche in questo caso evidentemente maggiore di qualunque numero dato.

31. Dal modo di generazione delle linee di sopra svolto, deriva naturalmente il principio per il quale si possono classificare. Una linea, curva o retta, considerata come il luogo di un punto mobile, assume una forma la quale dipende dal numero delle volte che esso giace sovra una retta fissa arbitrariamente condotta, ovvero dal numero delle loro intersezioni (reali ed immaginarie). Se questo numero è determinato, la linea potendo in coordinate rettilinee esprimersi per una equazione algebrica dicesi *algebrica*; se invece è maggiore d'ogni numero assegnabile la linea, esprimendosi per una equazione trascendente, nominasi *trascendente*. Questa distinzione così formulata da Leibnitzio fu concepita da Descartes il quale però chiamava *geometriche* le prime e le altre *meccaniche*.

Le linee *algebriche* per il medesimo principio, ricevono una ulteriore divisione distinguendosi in vari *ordini*, ciascuno dei quali essendo definito dal numero delle intersezioni, reali ed immaginarie, in cui esse possono essere incontrate da una retta arbitraria, pei Teoremi dei n.ⁱ 29, 30 è dato dal grado delle loro equazioni ridotte razionali ed intere. Così di 1.°, 2.°, 3.°,... n^{esimo} ordine sono le linee respettivamente rappresentate in coordinate rettilinee da equazioni di 1.°, 2.°, 3.°, n^{esimo} grado in x e y. Però non sempre il grado di una equazione fra le variabili x, y misura l'ordine della linea a cui appartiene; poichè se è formata del prodotto di fattori razionali ed interi in x, y invece di rappresentare una linea *propria* di quel dato ordine, semplice, simboleggia una linea complessa, cioè un sistema di linee, ciascuna delle quali corrisponde ad uno dei fattori in cui la proposta si decompone. Così l'equazione $F(x)=0$, del grado m, non conviene ad una linea propria del m^{esimo} ordine, ma ad un sistema al più di m rette parallele all'asse delle y ciascuna delle quali risponde ad uno degli m fattori lineari eguagliato a zero che $F(x)$ ammette.

Esercizi.

I. Un circolo ruotando intorno al suo centro si muove esternamente sulla circonferenza di un circolo fisso; 1.° un punto preso nella circonferenza del circolo mobile genera una curva che dicesi *epicicloide*; 2.° preso dentro o fuori del cerchio mobile, descrive la curva che è nominata *epitrocoide*.

Determinare, per un sistema di assi ortogonali, le equazioni di queste curve.

II. Un circolo ruotando intorno al suo centro si muova internamente sulla circonferenza di un cerchio fisso: 1.° un punto preso nella circonferenza del circolo mobile genera la curva detta *ipoci-*

cloide; 2.° preso invece dentro o fuori del cerchio mobile la curva descritta é chiamata *ipotrocoide*. Determinare, per un sistema di assi ortogonali, le equazioni di queste curve.

III. Dimostrare che se il rapporto fra i raggi dei due circoli fisso e mobile è commensurabile, tali curve sono algebriche, se incommensurabile sono trascendenti.

IV. Determinare le coordinate dei punti d'intersezione della retta $x=-4$ colla curva espressa dalla equazione:

$$(x^2+y^2)^2-(x^2+y^2)(4x-9)+4x^2=0,$$

(assi coordinati ortogonali).

V. Determinare le coordinate dei punti d'intersezione della retta $x=\frac{1}{6}$ colla curva data per l'equazione: $y-9=7^x$ (assi coordinati ortogonali).

VI. Determinare le coordinate dei punti d'intersezione delle rette:

$$x=-\infty, \ldots\ x=-3,\ x=-2,\ x=-1,\ x=0, x=+1,$$
$$x=+2\ \ x=+3 \ldots x=+\infty$$

colle curve:

$$y=2^{-1}(2^x-2^{-x});\qquad sen\,\pi\frac{x}{2}\ sen\,\pi\frac{y}{2}+3\ sen\ \pi\frac{x}{2}\ sen\,\pi y=0$$

$y=3\ cos\,2\,x$; $\quad y=4\ tang\,x$; $\quad y=2\ sec\,x$; $\quad y=sen\,x$

$y=5\ cotag\,x \quad y=0{,}08\ cosec\,x$.



CAPITOLO IV.

Linea retta.



Le linee di primo ordine rappresentate da una equazione di primo grado fra le due variabili x, y nel sistema d'assi xOy, $(xOy=\theta)$ sono linee rette.

La forma più generale di tale equazione è:

$$(1) \qquad Ay+Bx+C=0,$$

ove A, B, C sono numeri dati qualunque positivi o negativi.

Se $A=0$ e perciò $x=-\frac{C}{B}$, la linea che questa esprime avendo per ogni suo punto l'ascissa costante è una retta parallela all'asse della y.

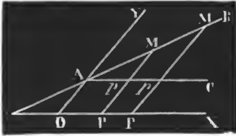
Se $B=0$ e perciò $y=-\frac{C}{A}$, parimente la linea è una retta parallela all'asse della x. Se A e B sono differenti da zero, risoluta la data equazione (1) relativamente ad y e posto $-\frac{B}{A}=a$, $-\frac{C}{A}=b$, devesi cercare il significato geometrico dell'equazione:

$$(2) \qquad y=ax+b,$$

o determinare la natura della linea che essa simboleggia.

Misurato sull'asse delle y un segmento $OA=b$, nella direzione Oy od Oy' secondo il segno di b, dalla estremità A del segmento si conduca la parallela AC all'asse delle x. Assunto poi un va-

lore arbitrario per x, $x=\mathrm{OP}=z$, si conduca per P una retta parallela all' asse OY, e sia p il punto ove questa taglia la AC. Avendo poi dalla (2) $\frac{y-b}{x}=a$ od $\frac{y-\mathrm{OA}}{\mathrm{OP}}=a$, si determini sulla P$p$ un punto M tale che per esso sia

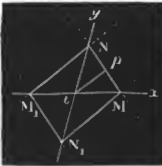


$\frac{\mathrm{MP}-\mathrm{OA}}{\mathrm{OP}}=\frac{\mathrm{M}p}{\mathrm{A}p}=a$, a valore numerico dato. Pertanto attribuendo successivamente alla x differenti valori, e determinati i punti corrispondenti M le cui coordinate soddisfano alla data equazione, essi formano la linea da questa rappresentata. Ma essendo il rapporto $\frac{\mathrm{M}p}{\mathrm{A}p}$ costante, qualunque sia M, essa è evidentemente una retta.

Nel n.° 9 si dimostrò poi la reciproca cioè che ogni retta è data per una equazione di primo grado, ed è perciò una linea di primo ordine, e si fissò il geometrico significato delle due costanti che appariscono nella sua equazione. Questa poi oltre le forme (1) (2), ne ammette altre in cui viene di frequente usata.

Forme differenti della equazione della retta

33. Problema I. *Determinare le lunghezze dei segmenti che la retta, $Ay+Bx+C=0$, taglia sugli assi coordinati e per mezzo di essi esprimere le costanti della sua equazione.*



Le coordinate di ogni punto della retta dovendo soddisfarne l'equazione, e quelle del punto M ove incontra l'asse della x dovendo essere ($x=\mathrm{OM}=p$, $y=0$) si ottiene $Bp+C=0$; e perciò $p=-\frac{C}{B}$. Simil-

mente pel punto N ove taglia l'asse della y ($y=q=\mathrm{ON}, x=0$) si ha $\mathrm{A}q+\mathrm{C}=o$; donde $q=-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}$.

Divisa ora la equazione generale per C, e posto in essa $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}=-\frac{1}{q}$, $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}=-\frac{1}{p}$, la forma richiesta è:

$$(1) \qquad \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1;$$

la quale poi rimane la stessa per assi obliquangoli od ortogonali.

È evidente come la posizione della retta relativamente al dato sistema di assi dipenda dai segni delle quantità p, q. Quindi messi in evidenza i segni, abbiamo che:

$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ rappresenta la retta MN,

$\frac{x}{p}-\frac{y}{q}=1$ rappresenta la retta MN_1;

$\frac{y}{q}-\frac{x}{p}=1$ rappresenta la retta $\mathrm{M}_1\mathrm{N}$;

$\frac{y}{q}+\frac{x}{p}=-1$ rappresenta la retta $\mathrm{M}_1\mathrm{N}_1$.

Se una delle quantità A,B si annulla, per esempio $\mathrm{A}=0$, il segmento che le corrisponde, $q=-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}$, diviene infinito: e la retta $\frac{x}{p}=1$, tagliando uno degli assi, quello delle y, ad una distanza infinita è ad esso parallela. Il che corrisponde al n.° 32.

34. Problema II. *Esprimere l'equazione della retta mediante la lunghezza della perpendicolare abbassata su di essa dall'origine delle coordinate, e mediante gli angoli che questa forma cogli assi.*

Essendo $y\mathrm{O}x$ il dato sistema di assi, $y\mathrm{O}x=\theta$, si indichino con P la lunghezza della perpendicolare Op, abbassata dall'origine

O del sistema sulla retta MN data dall'equazione

$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$, ($p$=OM, q=ON) e con $\alpha=p$OM, $\beta=p$ON gli angoli che tale perpendicolare forma cogli assi delle x, e delle y. Dai triangoli rettangoli pOM, pON, si trae $p=\frac{P}{\cos\alpha}$, $q=\frac{P}{\cos\beta}$ e quindi sostituendo si ottiene per la retta la richiesta equazione:

(1) $$y\cos\beta+x\cos\alpha-P=0 \text{ ove } \alpha+\beta=\theta$$

Per il sistema ortogonale di assi, avendo $\beta=90^{\circ}-\alpha$, essa diviene:

(2) $$y\,sen\,\alpha+x\cos\alpha=P.$$

Per ridurre la generale equazione della retta $Ay+Bx+C=0$ alla forma $y\cos\beta+x\cos\alpha-P=0$ è necessario in prima determinare gli angoli che essa fa cogli assi coordinati, e quindi la direzione e la lunghezza della perpendicolare condotta su di essa dall'origine.

35. Problema I. *Determinare gli angoli* λ *e* μ *che la retta* $Ay+Bx+C=0$ *respettivamente forma cogli assi delle* x *e delle* y, *essendo* $xOy=\theta$ *l'angolo del sistema.*

Risolvendo la data equazione successivamente per y, e per x abbiamo:

$$y=-\frac{B}{A}x-\frac{C}{A},\quad x=-\frac{A}{B}y-\frac{C}{B}: \text{ donde (n.° 9)}$$

$$\frac{sen\,\lambda}{sen\,(\theta-\lambda)}=-\frac{B}{A},\quad \frac{sen\,\mu}{sen\,(\theta-\mu)}=-\frac{A}{B},$$

le quali conducono alle seguenti espressioni:

$$tang\,\lambda=\frac{-B\,sen\,\theta}{A-B\cos\theta},\quad tang\,\mu=\frac{-A\,sen\,\theta}{B-A\cos\theta}.$$

Queste somministrano quelle più usate:

$$(1)\qquad sen\,\lambda=\frac{B\,sen\,\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}},\qquad sen\,\mu=\frac{A\,sen\,\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}}.$$

Se il sistema di assi è ortogonale, o $\theta=90^0$, $sen\,\mu=\cos\lambda$, le (1) si cambiano nelle:

$$(2)\qquad sen\,\lambda=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad \cos\lambda=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Problema II. *Determinare la lunghezza e la direzione della perpendicolare* P *condotta dall' origine delle coordinate sulla retta* $Ay+Bx+C=0$.

I segmenti che questa determina sugli assi Oy, Ox, sono espressi (n.° 33) da $q=-\frac{C}{A}$, $p=-\frac{C}{B}$, inoltre osservando che la perpendicolare P divide il triangolo chiuso dalla retta e dagli assi in due triangoli rettangoli si hanno le relazioni $P=p\,sen\,\lambda$, $P=q\,sen\,\mu$, da ciascuna delle quali per le formule (1) si deduce:

$$(3)\qquad P=\frac{-C\,sen\,\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}}$$

in cui conviene attribuire al radicale il segno + o — per modo che P abbia sempre valore positivo.

Per determinare poi la direzione della perpendicolare OP s' indichino con α,β gli angoli che essa forma cogli assi Ox, Oy. Dai triangoli rettangoli formati da OP si ricavano le relazioni: $\lambda=\alpha+90^0$, $\mu=\beta+90^0$: da cui si trae $sen\,\lambda=\cos\alpha$, $sen\,\mu=\cos\beta$ e perciò, per le (1).

$$(4)\qquad \cos\alpha=\frac{B\,sen\,\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}},\qquad \cos\beta=\frac{A\,sen\,\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}}.$$

Se il sistema di assi è ortogonale, $\theta=90^0$ ed $\beta=90^0-\alpha$, le

formule (3) e (4) divengono:

$$(5)\qquad P=-\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}};$$

$$(6)\qquad \cos\alpha=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\qquad \operatorname{sen}\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

PROBLEMA III. *Ridurre la equazione* $Ay+Bx+C=0$ *alla forma* $y\cos\beta+x\cos\alpha-P=0$.

Moltiplicandone tutti termini pel fattore

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}},$$

si ottiene:

$$\frac{A\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}}y+\frac{B\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}}x$$
$$+\frac{C\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}}=0,$$

o per la (3) e le (4), $y\cos\beta+x\cos\alpha-P=0$ la quale, quando il sistema degli assi è ortogonale, si riduce a, $y\operatorname{sen}\alpha+x\cos\alpha-P=0$.

Determinazione di una retta mediante date condizioni.

36. L'equazione di primo grado a due variabili, x ed y, contenendo due costanti arbitrarie essenzialmente distinte, la retta da essa rappresentata può essere sottomessa solo a verificare due condizioni le quali conducendo a due relazioni fra quantità date e le arbitrarie danno modo di determinarle.

E le coppie di tali condizioni necessarie e sufficienti alla completa determinazione di una retta sono: 1.° due punti per cui debba passare; 2.° un punto dal quale debba condursi e l'an-

golo che debba chiudere con una retta data. Quindi per trattare compiutamente questi casi è necessario risolvere i diversi problemi seguenti.

Problema. I. *Trovare l' equazione generale delle rette che passano per un punto dato* (x_0, y_0).

Sia $ly+mx+n=0$ l' equazione generale della retta in cui l, m e n sono costanti arbitrarie: dovendo il punto dato giacere su di essa, è necessario che sussista l' equazione $ly_0+mx_0+n=0$ mediante la quale si può eliminare una delle arbitrarie

Quindi eliminandovi la n si ottiene per l' equazione cercata

$$(1) \qquad (y-y_0)+\lambda(x-x_0)=0, \text{ ove } \lambda=\frac{m}{l}.$$

Problema II. *Determinare le coordinate del punto d' intersezione delle due rette:* $Ay+Bx+C=0$, $A'y+B'x+C'=0$. *(a)*

Il punto cercato (X,Y), dovendo nel medesimo tempo giacere sulle due rette, bisogna che le sue coordinate soddisfino contemporaneamente ambo le loro equazioni; e perciò sono

$$(2) \qquad Y=\frac{BC'-B'C}{AB'-A'B} \qquad X=\frac{A'C-AC'}{AB'-A'B}$$

o per brevità

$$(3) \qquad Y=\frac{(BC')}{(AB')}, \qquad X=\frac{(A'C)}{(AB')}$$

notando con (AB') la differenza $AB'-A'B$ e così per tutte le altre.

Se $(AB')=0$, e (BC'), $(A'C)$ diverse da zero, essendo $Y=\infty$, $X=\infty$ le rette date sono paralelle: se poi

$$(AB')=(BC')=(A'C)=0 \quad \text{od} \quad \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'},$$

le rette date si confondono insieme.

Corollario I. Date le equazioni di due rette (a) trovare l'equazione generale di quelle condotte per il loro punto d'intersezione.

Questo problema facilmente si risolve adoperando il seguente lemma: Se $F(x,y)=0$, $f(x,y)=0$ rappesentano due linee, quella espressa da $F(x,y)+\lambda\, f(x,y)=0$ (ove λ è una costante qualunque) passa per ogni punto ad esse comune.

Quindi la equazione (3) $(Ay+Bx+C)+\lambda(A'y+B'x+C')=0$ che evidentemente appartiene ad una retta, rappresenta quella condotta per la intersezione delle (a), poichè se vi fossero sostituite le coordinate del punto in cui esse si tagliano rimarebbe soddisfatta, separatamente annullandosi i due termini che compongono il suo primo membro.

Corollario II. É facile dedurre da ciò la condizione affinchè le tre rette $Ay+Bx+C=0$, $A'y+B'x+C'=0$, $A''y+B''x+C''=0$ s'incontrino in un punto.

Evidentemente le coordinate del punto d'intersezione di due di esse devono soddisfare l'equazione della terza retta; ed adoperando le espressioni (3) si ha per la richiesta condizione:

$$(4)\qquad \begin{cases} A''(BC')+B''(CA')+C''(AB')=0 \\ A(B'C'')+B(C'A'')+C(A'B'')=0 \\ A'(BC'')+B'(A''C)+C'(AB'')=0 \end{cases}$$

Però dal principio posto nel Corollario I si trae il nuovo e più comodo criterio seguente: *Tre rette passano per un medesimo punto quando moltiplicata ciascuna delle loro equazioni per una costante arbitraria ed insieme addizionate la somma è identicamente nulla.*

Ciò essendo la relazione

$$l(Ay+Bx+C)+m(A'y+B'x+C')+n(A''y+B''x+C'')=0$$

ha luogo qualunque sieno x,y. Infatti allora quei valori delle coordinate che separatamente annullano i primi due termini del primo membro devono necessariamente annullare anche il terzo.

Problema III. *Determinare l'angolo formato dalle rette date per le equazioni* $Ay+Bx+C=0$, $A'y+B'x+C'=0$.

Sia θ l'angolo degli assi, α quello formato dalla prima retta coll'asse delle x, α' quello della seconda col medesimo asse, e φ l'angolo delle due rette. Per il triangolo chiuso fra le rette e l'asse delle x si ha $\varphi=\alpha-\alpha'$ e $tang\,\varphi=\frac{tang\,\alpha-tang\,\alpha'}{1+tang\,\alpha\; tang\,\alpha'}$:

ma (n.° 35) $tang\,\alpha=\frac{-B\,sen\,\theta}{A-B\cos\theta}$, $tang\,\alpha'=\frac{-B'\,sen\,\theta}{A'-B'\cos\theta}$

e quindi

(5) $$tang\,\varphi=\frac{(AB')\,sen\,\theta}{AA'+BB'-(AB'+A'B)\cos\theta}.$$

Se il sistema di assi è ortogonale, $\theta=90°$, la espressione (5) si riduce alla:

(6) $$tang\,\varphi=\frac{(AB')}{AA'+BB'}.$$

Corollario I. *Condizione affinchè le due rette siano parallele.* È questa evidentemente data da $\varphi=0$, o $tang\,\varphi=0$ e perciò da (7) $(AB')=0$, la quale rimane la stessa e per assi obliquangoli e per assi ortogonali. Se le equazioni delle due rette hanno la forma $y=ax+b$, $y=a'x+b'$ (*b*) essa diviene: $a=a'$ (8).

Corollario II. *Condizione affinchè le due rette sieno perpendicolari.* Dovendo essere $\varphi=90°$ o $tang\,\varphi=\infty$, dalle formule (5) (6) immediatamente si deduce

(9) $$AA'+BB'=(AB'+A'B)\cos\theta$$

(10) $$AA'+BB'=0$$

secondochè gli assi sono obliquangoli od ortogonali: ed

(11) $$1+aa'+(a+a')\cos\theta=0$$

(12) $$1+aa'=0$$

quando le rette sono date dalle (*b*) e sono riferite ad assi obliquangoli od ortogonali.

37. Problema I. *Trovare l'equazione della retta condotta per due dati punti* (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

La retta che passa pel punto (x_1, y_1) è data da

(*a*) $$(y-y_1)+\lambda(x-x_1)=0;$$

ma passando per (x_2, y_2) deve sussistere la relazione

$$(y_2-y_1)+\lambda(x_2-x_1)=0 \text{ da cui } \lambda=-\frac{y_2-y_1}{x_2-y_1}.$$

Eliminando perciò dalla (*a*) la indeterminata λ, si ottiene per la retta richiesta l'equazione

(1) $$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

la quale, togliendo le frazioni, diviene

(2) $$y(x_2-x_1)-x(y_2-y_1)+(x_1y_2)=0.$$

Corollario I. L'equazioni (1) e (2) si rendono più semplici secondo la posizione dei punti dati. Così

$\frac{y}{x-x_1}=\frac{y_2}{x_2-x_1}$ od $y(x_2-x_1)-xy_2+x_1y_2=0$ conviene alla retta condotta per il punto $(x_1, 0)$ preso sull'asse delle x e per (x_2, y_2): e similmente $\frac{y-y_1}{x}=\frac{y_2-y_1}{x_2}$ od $yx_2-x(y_2-y_1)-y_1x_2=0$, se il primo punto giace sull'asse delle y; $\frac{y-y_1}{x}+\frac{y_1}{x_2}=0$ od $yx_2+xy_1-y_1x_2=0$ se uno dei punti giace sull'asse delle y e l'altro su quello delle x; $\frac{y}{x}=\frac{y_2}{x_2}$ od $yx_2-xy_2=0$, se il primo punto coincide coll'origine delle coordinate.

Corollario II. La condizione affinchè tre punti (x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3) siano in linea retta si ottiene ponendo le coordinate di uno di essi nella equazione della retta che congiunge i due rimanenti. Pertanto essa è

$$(3) \qquad y_1(x_3-x_2)+y_2(x_1-x_3)+y_3(x_2-x_1)=0.$$

Problema II. *Determinare l'equazione di una retta che passa per un punto dato* (x_0, y_0), *e che forma un angolo dato* φ *colla retta* $y=ax+b$, *l'angolo del sistema di assi essendo* θ.

Sia l'equazione della retta dimandata: $y-y_0=a'(x-x_0)$. La formula (5) del n.° 36 diventa

$$tang\,\varphi=\frac{(a-a')\,sen\,\theta}{1+aa'+(a+a')\cos\theta},$$

dalla quale si deduce

$$a'=\frac{a\,sen\,(\theta-\varphi)-sen\,\varphi}{sen\,(\theta+\varphi)+a\,sen\,\varphi}.$$

Pertanto l'equazione diviene

$$(4) \qquad y-y_0=\left(\frac{a\,sen\,(\theta-\varphi)-sen\,\varphi}{sen\,(\theta+\varphi)+a\,sen\,\varphi}\right)(x-x_0)\,;$$

e se il sistema di assi è ortogonale si ha

$$(5) \qquad y-y_0=\frac{a\cos\varphi-sen\,\varphi}{\cos\varphi+a\,sen\,\varphi}(x-x_0).$$

Corollario I. Se la retta data è uno degli assi coordinati l'equazioni (4) e (5) si semplicizzano. Infatti si trasformano nelle

$$y-y_0=\frac{sen\,\varphi}{sen\,(\theta+\varphi)}(x_0-x),\ y-y_0=tang\,\varphi\,(x_0-x)$$

se la retta è l'asse delle x, e nelle

$$y-y_0=\frac{sen\,(\theta-\varphi)}{sen\,\varphi}(x-x_0),\ y-y_0=cot\,\varphi(x-x_0)$$

se essa coincide coll'asse delle y.

Corollario II. *Condurre una retta per il punto $(x_0 y_0)$ parallelamente alla retta data $y=ax+b$.* L'equazione della retta cercata immediatamente si deduce dalla (4) o dalla (5) ponendovi $\varphi=0$; quindi è (6) $y-y_0=a(x-x_0)$, qualunque sia il sistema d'assi.

Corollario III. *Condurre per il punto $(x_0 y_0)$ una perpendicolare alla retta $y=ax+b$.* Essendo $\varphi=90^0$, dalle (4) e (5) si ottiene

$$(7) \qquad y-y_0=-\left(\frac{1+a\cos\theta}{a+\cos\theta}\right)(x-x_0),$$

$$(8) \qquad y-y_0=-\frac{1}{a}(x-x_0).$$

Problemi.

38. Problema I. *Determinare la lunghezza* P *della perpendicolare abbassata dal punto (x_0, y_0) sulla retta* (*a*) $Ay+Bx+C=0$.

Ridotta l'equazione (*a*) alla forma: (*b*) $y\cos\beta+x\cos\alpha-p=0$, ($p=OP, \beta=POy, \alpha=POx$), dal punto dato M (posto fra O e la retta) e da Q si conducano due perpendicolari sovra OP, ed r, s siano i punti di intersezione, infine sia MR la perpendicolare di cui si cerca la lunghezza.



Dai triangoli MQt, OQs si trae; $rs=y_0\cos\beta$, O$s=x_0\cos\alpha$: cosicchè $P=MR=OP-Or=-(y_0\cos\beta+x_0\cos\alpha-p)$. Ma se il punto M fosse situato relativamente alla retta dalla parte opposta a quella in cui giace l'origine delle coordinate, l'espressione per P sarebbe $+(y_0\cos\beta+x_0\cos\alpha-p)$, quindi questa cambia segno pas-

sando dall'una all'altra parte della retta. Pertanto nel valore della perpendicolare P il segno significa la sua posizione relativa: se il segno positivo si assume ad indicare che essa è con p dalla stessa parte della retta, il segno negativo indica che è dalla parte opposta a quella ove si trova p.

Laonde nella formula

$$(1) \qquad P=\pm(y_0 \cos\beta + x_0 \cos\alpha - p)$$

sostituendo a' $\cos\alpha$, $\cos\beta$, p i loro valori (n.° 35) si ottiene:

$$(2) \qquad P=\pm\frac{(Ay_0+Bx_0+C)\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}}.$$

Nel sistema ortogonale di assi ($\theta=90°$) le espressioni (1), (2) divengono:

$$(3) \quad P=\pm(y_0\,\mathrm{sen}\,\alpha + x_0\cos\alpha - p); \quad (4) \quad P=\pm\frac{Ay_0+x_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Problema II. *Determinare l'equazioni delle bissettrici degli angoli formati dalle rette:* $y\cos\beta + x\cos\alpha - p = 0, y\cos\beta' + x\cos\alpha' - p' = 0$

Ogni punto (X,Y) della bissettrice dell'angolo formato dalle rette date essendo ad eguale distanza da queste, immediatamente si ottiene la sua equazione:

$$(5) \qquad Y\cos\beta + X\cos\alpha - p = Y\cos\beta' + X\cos\alpha' - p',$$

poichè ciascun suo membro esprime la lunghezza di una delle perpendicolari che misurano la distanza del punto (X, Y) alle date rette.

Notando che il segno di una perpendicolare cambia passando da una parte all'altra della retta su cui è condotta, la equazione

$$(6) \qquad Y\cos\beta + X\cos\alpha - p = -(Y\cos\beta' + X\cos\alpha' - p'),$$

rappresenta la bissettrice dell'angolo supplementario di quello formato dalle rette date.

L'equazioni (5), (6), per assi ortogonali, si trasformano nelle

(7) $Y\,sen\,\alpha+X\cos\alpha-p=\pm(Y\,sen\,\alpha'+X\cos\alpha'-p')$

Corollario. Se le rette date hanno per equazioni: $Ay+Bx+C=0$, $A'y+B'x+C'=0$, quelle delle bissettrici prendono la forma

(8) $$\frac{AY_0+BX_0+C}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}}=\pm\frac{A'Y_0+B'X_0+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2-2A'B'\cos\theta}}$$

per assi obliquangoli, e

(9) $$\frac{Ay_0+Bx_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\pm\frac{A'y_0+B'x_0+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}$$

per assi ortogonali.

Problema III. *Trovare la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione generale di secondo grado in x ed in y,*

(*a*) $Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$ *rappresenti due rette.*

A sciogliere questa questione basta ricercare se la data equazione (*a*) può identificarsi col prodotto delle equazioni di due rette $F(\alpha x+\beta y-1)(\alpha' x+\beta' y-1)=0$. Pertanto eseguito questo prodotto ed ordinato per x e per y ed eguagliato il coefficiente di ogni suo termine con quello del termine che in (*a*) gli corrisponde, si ottengono le cinque equazioni:

(*b*) $F\alpha\alpha'=C, F\beta\beta'=A, F(\alpha\beta'+\alpha'\beta)=B, F(\alpha+\alpha')=-E, F(\beta+\beta')=-D$

fra cui eliminate le quattro quantità $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ si perviene alla cercata condizione. Infatti con eliminare α, α', β si ha:

$$F\beta'^2+D\beta'+A=0$$
$$F\beta'^2(4CF-E^2)+D\beta'(4CF-E^2)+(B^2F-BDE+CD^2)=0,$$

da cui si trae immediatamente:

(10) $AE^2+CD^2+FB^2-BDE-4ACF=0.$

Esercizi.

I. Determinare la posizione delle seguenti rette trovando i segmenti che esse tagliano sugli assi;

$4x+7y=28$; $3x-5y=11$; $7x+2y+8=0$; $4y-6x=3$.

II. Determinare gli angoli che formano cogli assi le rette seguenti: $5y-3x=16$; $2y+7x=21$; $3y+4x+1=0$ (assi ortogonali) $4y+2x=9$; $11x-3y=5$; $11x-4=9y$ (assi che comprendono un angolo di 80^0).

III. Calcolare la lunghezza della perpendicolare abbassata dall'origine sulla retta: $6x+4y+17=0$, essendo gli assi ortogonali.

IV. Calcolare la lunghezza della perpendicolare abbassata dal punto $(x=-1, y=3)$ sulla retta $3x-5y-7=0$, per assi ortogonali, e per assi comprendenti un angolo di $75^0\,40'\,12''$.

V. Formare le equazioni dei lati di un triangolo, le coordinate dei cui vertici sono $(x=2, y=-1)$, $(x=3, y=4)$, $(x=-8, y=1)$, e trovare le lunghezze delle perpendicolari abbassate da ogni suo vertice sul lato opposto, gli assi comprendendo un angolo di 60^0.

VI. Formare le equazioni delle mediane del precedente triangolo.

VII. Trovare le coordinate dei vertici e le equazioni delle diagonali del quadrilatero i cui lati sono espressi dalle seguenti equazioni

$4y-6x=21$, $3y+2x=7$, $15x-4y=11$, $13x+10y+29=0$.

VIII. Trovare le coordinate dei punti d'intersezione dei lati opposti per il medesimo quadrilatero e la equazione della retta che li congiunge.

IX. Calcolare l'angolo che comprendono le due rette: $2y+5x-1=0$, $11x-7y+4=0$ per assi il cui angolo è di 18^0.

X. Trovare le equazioni delle perpendicolari condotte per ogni vertice sopra il lato opposto del triangolo $(x=-1\ y=4)$, $(x=5, y=-3)$, $(x=2, y=7)$ per assi ortogonali e per assi il cui angolo è di 30°.

XI. Trovare le equazioni delle perpendicolari inalzate nei punti di mezzo dei lati dello stesso triangolo, per assi ortogonali, e per assi il cui angolo è di 60°.

XII. Formare l'equazione delle bissettrici degli angoli compresi dalle due rette $4y+3x+4=0$, $12y-5x+24=0$, gli assi essendo ortogonali.

XIII. Esprimere l'area A di un triangolo date le coordinate dei suoi vertici (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).

La formula richiesta è

$$2A=(y_1x_2)+(y_2x_3)+(y_3x_1).$$

XIV. Esprimere l'area A di un poligono per mezzo delle coordinate dei suoi vertici $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \dots (x_n,y_n)$.

La formula richiesta è

$$2A=(x_1y_2)+(x_2y_3)+(x_3y_4)+\dots+(x_{n-1}y_n)+(x_ny_1).$$

XV. Esprimere l'area S di un triangolo per le costanti delle equazioni dei suoi lati:

$$Ay+Bx+C=0, A'y+B'x+C'=0, A''y+B''x+C''=0.$$

La formula richiesta è

$$2S=\frac{\left(A(B'C'')+A'(CB'')+A''(BC')\right)^2}{(AB').(AB'').(A'B'')}.$$

XVI. Dimostrare che ogni equazione omogenea del grado m fra le due variabili x, y esprime un sistema di m rette che passano per l'origine.

XVII. Determinare l'angolo φ compreso dalle rette: $Ay^2+Bxy+Cy^2=0$, e per assi ortogonali e per assi obliquangoli.

Nel primo caso si ha

$$tang\,\varphi=\frac{\sqrt{B^2-4AC}}{A+C}$$

e nell' altro

$$tang\,\varphi=\frac{sen\,\theta\cdot\sqrt{B^2-4AC}}{A+C-B\cos\theta}.$$

XVIII. Determinare l'equazione delle bissettrici dell'angolo chiuso dalle rette: $Ay^2+Bxy+Cx^2=0$, gli assi essendo ortogonali.

Essa è $B(x^2-y^2)+2(A-C)xy=0$.

XIX. Due vertici di un triangolo si muovono lungo due rette fisse, e i tre lati passano per tre punti fissi situati sopra una medesima retta; determinare l' equazione della linea descritta dal terzo vertice.

XX. Condotta una parallela alla base di un triangolo e nei punti ove taglia i lati elevate a questi delle perpendicolari, trovare il luogo della loro intersezione.

XXI. Date le rette $A(y-b)^2+B(x-a)(y-b)+C(x-a)^2=0$ conducendo dall' origine O un raggio qualunque che le tagli in R_1 e in R_2, il luogo di un punto R preso su di esso per il quale sussiste la relazione $\frac{2}{OR}=\frac{1}{OR_1}+\frac{1}{OR_2}$ è una retta la quale nominasi polare di O relativamente alle rette date.

La sua equazione è $(2Ab+Ba)(y-b)+(2Ca+Bb)(x-a)=0$.

XXII. Date le rette $A(y-b)^2+B(x-a)(y-b)+C(x-a)^2=0$, conducendo dalla origine O due rette qualunque, ed unendo i punti d' intersezione trasversalmente, il punto ove queste trasversali si tagliano giace sulla polare di O.



CAPITOLO V.

Distinzione delle linee di secondo ordine in generi.



39. La forma più generale dell'equazione di secondo grado a due variabili è

$$(1)\qquad F(x, y)=Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$

nella quale A, B, C, D, E, F sono costanti qualunque.

La natura delle linee rappresentate dalla (1) dipendendo dai valori particolari delle costanti, è necessario investigare quali linee, di forma essenzialmente diversa, possano essere simboleggiate da essa. Il metodo che seguiremo in questa ricerca comprende due parti; la prima ha per oggetto di ridurre l'equazione generale alle forme più semplici che può assumere, l'altra di ritrovarne la geometrica significazione.

Riduzione dell' equazione generale.

40. Si debbono nell'equazione (1) considerare separatamente due casi fondamentali: quando uno almeno dei coefficienti (che si suppone reso positivo) dei quadrati delle variabili è diverso da zero, e quando ambedue insieme sono nulli.

1.° *Caso.* $A>0$. Ordinando $F(x,y)$ rapporto a y, quindi moltiplicando e dividendo per $4A$ ed infine aggiungendo e togliendo al numeratore la quantità $(Bx+D)^2$, che addizionata ai primi due

termini dà per somma un quadrato perfetto, l'equazione (1) prende la forma

$$\left[\frac{2Ay+Bx+D}{2\sqrt{A}}\right]^2+\frac{1}{4A}\Big[(4AC-B^2)x^2$$
$$+2(2AE-BD)x+(4AF-D^2)\Big]=0;$$

ed avendo posto per brevità $2Ay+Bx+D=2AY$,

$$4AC-B^2=M,\ 2AE-BD=N,\ 4AF-D^2=P;$$

si scrive più semplicemente nel modo seguente

(2) $$AY^2+\frac{1}{4A}\left[Mx^2+2Nx+P\right]=0.$$

Denotando con Δ la espressione

(3) $$\Delta=AE^2+CD^2+FB^2-BDE-4ACF,$$

fra le quantità M, N, P sussiste la

(4) $$-4A\Delta=MP-N^2.$$

Per ridurre ulteriormente la (2) sono di nuovo da distinguere due casi: M diverso da zero e M nullo.

(*a*) M diverso da zero. Considerando il trinomio $Mx^2+2Nx+P$ si trasformi in altro composto del quadrato di una funzione lineare in x e di una quantità indipendente da questa variabile: con ciò si ha identicamente

$$\frac{1}{M}\left[M^2x^2+2MNx+PM\right]=\frac{1}{M}\left[(Mx+N)^2+(PM-N^2)\right].$$

Quindi por la (4), e posto

(5) $$Mx+N=2MX,$$

si ottiene la trasformata

$$AY^2+\frac{MX^2}{A}-\frac{\Delta}{M}=0,$$

la quale, ponendo $A=p_1^2$, $\frac{M}{A}=\pm p_2^2$, $-\frac{\Delta}{M}=\pm p_3^2$, diviene

$$(6) \qquad p_1^2Y^2\pm p_2^2X^2\pm p_3^2=0$$

in cui $$p_1^2\times\pm p_2^2\times\pm p_3^2=-\Delta.$$

In questa equazione si debbono considerare i segni di cui le p^2 sono affette, i quali dipendono dalle quantità M e Δ: cosicchè sono da distinguere due *casi principali* secondo che M è maggiore o minore di zero.

I.° $M>0$. Questo si suddivide nei tre casi seguenti:

1.° Tutte le p^2 positive, ovvero $p_1^2Y^2+p_2^2X^2+p_3^2=0$, il che ha luogo per $\Delta<0$;

2.° Le prime due p^2 positive e l'altra negativa ovvero $p_1^2Y^2+p_2^2X^2-p_3^2=0$, a cui corrisponde $\Delta>0$;

3.° Le prime due p^2 positive e l'altra nulla ossia $p_1^2Y^2+p_2^2X^2=0$, e quindi $\Delta=0$.

II.° $M<0$. Similmente questo caso comprende i tre seguenti:

1.° La terza p^2 positiva e la seconda negativa, od $p_1^2Y^2-p_2^2X^2+p_3^2=0$, e con ciò $\Delta>0$;

2.° Le due ultime p^2 negative, o $p_1^2Y^2-p_2^2X^2-p_3^2=0$, onde $\Delta<0$;

3.° La ultima p^2 nulla, o $p_1^2Y^2-p_2^2X^2=0$, e con ciò $\Delta=0$.

(*b*) M nullo. La (2) riducesi, poichè per la (4) si ha $N=2\sqrt{A\Delta}$,

$$AY^2+\frac{1}{4A}\left[2Nx+P\right]=0;$$

ovvero ponendo $2Nx+P=4A\Delta X$, e $A=p_1^2$, $\Delta=p_2^2$,

$$(7) \qquad AY^2+\Delta X=p_1^2Y^2+p_2^2X=0;$$

e per N o Δ nullo ad

$$(8) \qquad AY^2+\frac{P}{4A}=p_1^2Y^2\pm p_3^2=0, \text{ dove } \pm p_3^2=\frac{P}{4A}.$$

La (7) e (8) danno luogo ai seguenti casi

III.° $M=0$, $\Delta>0$,

1.° Le p^2 diverse da zero, o $p_1^2Y^2+p_2^2X=0$,

$M=0$, $\Delta=0$.

1.° Ambedue le p^2 positive, o $p_1^2Y^2+p_2^2=0$, e vi corrisponde $P>0$;

2.° La seconda p^2 negativa, o $p_1^2Y^2-p_2^2=0$, e con ciò $P<0$;

3.° La seconda p^2 nulla, od $p_1^2Y^2=0$, e con questa $P=0$.

2.° *Caso.* $A=C=0$. L'equazione generale delle linee di secondo ordine essendo

$$Bxy+Dy+Ex+F=0, \tag{9}$$

in cui B può sempre ritenersi come positivo, aggiungendovi e togliendovi $\frac{DE}{B}$ si trasforma identicamente nella

$$\frac{1}{B}(Bx+D)(By+E)+\frac{1}{B}(BF-DE)=0. \tag{10}$$

Osservando aversi $M=-B^2$, $\Delta=B(BF-DE)$, e preso

$$\frac{Bx+D}{\sqrt{B}}=Y-BX,\quad \frac{By+E}{\sqrt{B}}=Y+BX, \tag{11}$$

si trova per equazione ridotta la

$$Y^2+MX^2-\frac{\Delta}{M}=0, \tag{12}$$

la quale è evidentemente compresa nell'equazione (6) discussa nei due casi 1.° e 2.° del caso generale II° relativo a $M<0$.

Significato geometrico delle equazioni ridotte.

41. Il carattere più importante che può fare riconoscere la forma della linea rappresentata da una equazione algebrica qualunque consiste, o nell'essere questa limitata da ogni parte, o nell'esten-

dersi all' infinito in una o più direzioni. Si vide per la circonferenza del circolo (n.° 10) come una equazione di secondo grado possa esprimere una linea chiusa, e per il sistema di due rette (n.°38) come quella possa eziandio rappresentare linee che si estendono allo infinito. Quindi è necessario esaminare partitamente le particolari equazioni dedotte da quella generale delle linee di secondo ordine ed indicarne la natura ricercando se una retta condotta in arbitraria direzione dall'origine possa mai incontrarle all'infinito.

Esse sono poi inferite a nuovi assi le cui equazioni sono per M diverso da zero

$$Y=y+\frac{B}{2A}x+\frac{D}{2A}=0,\quad X=\frac{1}{2}\left(x+\frac{N}{M}\right)=0,$$

e per M nullo, la precedente $Y=0$, e con essa, per Δ diverso da zero, $X=\frac{1}{4A\Delta}\left(2Nx+P\right)=0$ e, per Δ nulla, $x=0$.

I.° Equazioni in cui $M>0$.

1.° $\Delta>0, p_1^2Y^2+p_2^2X^2-p_3^2=0$. Risoluta relativamente a Y dà la espressione $Y=\pm\frac{p_2}{p_1}\sqrt{\frac{p_3^2}{p_2^2}-X^2}$: quindi ad ogni valore della X compreso fra 0 e $\pm\frac{p_3}{p_2}$ corrispondono due valori eguali e di segno contrario per la Y, ed ai valori $X=0, X=\pm\frac{p_3}{p_2}$ i valori $Y=\pm\frac{p_3}{p_1}, Y=0$. Risoluta per X, si ha $X=\pm\frac{p_1}{p_2}\sqrt{\frac{p_3^2}{p_1^2}-Y^2}$ da cui similmente si deduce che ad ogni valore di Y compreso fra 0 e $\pm\frac{p_3}{p_1}$ corrispondono per X due valori eguali e di segno contrario, ed ai valori limiti $Y=0$, $Y=\pm\frac{p_3}{p_1}$ convengono i valori $X=\pm\frac{p_3}{p_2}, X=0$. Laon-

de la curva è simmetrica intorno ai due assi coordinati e taglia ciascuno di questi in due punti ad eguale distanza dall'origine delle coordinate

$$Y=\pm\frac{p_3}{p_1}=\pm\sqrt{\frac{\Delta}{A\,.\,M}};\quad X=\pm\frac{p_3}{p_2}=\pm\sqrt{\frac{A\,.\,\Delta}{M^2}}.$$

Inoltre conducendo per l' origine la retta $Y-\alpha X=0$, le coordinate dei punti ove questa sega la curva sono espresse da

$$X=\pm\frac{p_3}{\sqrt{p_2^2+p_1^2\alpha^2}},\quad Y=\pm\frac{\alpha p_3}{\sqrt{p_2^2+p_1^2\alpha^2}}$$

valori *reali* e *finiti* qualunque sia α e due a due eguali e di segno opposto: cosicchè la curva è chiusa ed è simmetrica intorno all'origine. E siccome la equazione della ellisse (n.° 11) adoperando il metodo di sopra svolto si pone sotto questa medesima forma, avendo per ciò $M=4a^2b^2$, $\Delta=-4a^4b^4$, $Y=2a^2y$, $X=4a^2b^2x$, si deduce che tale linea è una *ellisse.*

2.° $\Delta=0, p_1^2Y^2+p_2^2X^2=0$. Il primo membro di questa constando della somma di due quadrati si decompone necessariamente nelle due equazioni lineari che insieme devono sussistere: $Y=0$, $X=0$, da cui si traggono per x, y i valori

$$x=-\frac{N}{M}, y=\frac{MD-N\,.\,B}{2A\,.\,M}=\frac{2CD-BE}{M}$$

Pertanto la data equazione esprime un punto

3.° $\Delta<0$, $p_1^2Y^2+p_2^2X^2+p_3^2=0$. Dovendo la somma di tre quadrati di cui il terzo è una quantità costante annullarsi e a ciò non potendosi soddisfare da verun sistema di valori reali per X e Y, questa non conviene ad alcuna linea, non è suscettiva di ricevere alcuna geometrica significazione.

II.₀ Equazioni per cui $M<0$.

1.° $\Delta<0$, $p_1^2Y^2-p_2^2X^2-p_3^2=0$. Risolvendola successivamente per Y, e per X, si hanno:

$$Y=\pm\frac{p_2}{p_1}\sqrt{X^2+\frac{p_3^2}{p_2^2}},\quad X=\pm\frac{p_1}{p_2}\sqrt{Y^2-\frac{p_3^2}{p_1^2}}.$$

Nella prima attribuendo a X tutti i valori reali compresi fra $-\infty$ e $+\infty$, si ottengono per Y valori reali, due a due eguali e di segno contrario, e che pure vanno crescendo fino a $\mp\infty$ e quindi ad $X=0$, corrispondono i valori $Y=\pm\frac{p_3}{p_1}$: nella seconda per tutti i valori della Y compresi fra 0 e $\pm\frac{p_3}{p_1}$ si hanno valori immaginari per la X, e per quelli che da $\pm\frac{p_3}{p_1}$ procedono a $\pm\infty$, si hanno per X valori reali a due a due eguali e di segno opposto e che crescono da 0 a $\pm\infty$; infine ai valori limiti $Y=0$, $Y=\pm\frac{p_3}{p_1}$ si appartengono i valori $X=\pm\frac{p_3}{p_2}$, $X=0$. Laonde la curva è simmetrica intorno l'asse coordinato $Y=0$, che non incontra, taglia poi l'altro asse coordinato, intorno a cui è pure simmetrica, in due punti equidistanti dall'origine $Y=\pm\sqrt{\frac{\Delta}{AM}}$

non ha punti nella porzione indefinita di piano compresa fra le due paralelle all'asse delle Y,

$$X=\pm\sqrt{-\frac{A\,\Delta}{M^2}}.$$

Infine condotta per l'origine la retta $Y-\alpha X=0$, le coordinate dei punti ove questa sega la curva sono

$$X=\pm\frac{p_3}{\sqrt{p_1^2\alpha^2-p_2^2}},\quad Y=\pm\frac{p_3\alpha}{\sqrt{p_1^2\alpha^2-p_2^2}}$$

ed hanno valori reali solo quando la retta è compresa nell'angolo chiuso dalle due rette $p_1^2Y^2-p_2^2X=0$, le quali incontrano la curva in due direzioni opposte all'infinito. Da questa discussione si deduce che la curva è composta di due rami separati che procedono all'infinito, uno dalla parte di $X=0$ positivo, il secondo dalla parte di $X=0$ negativo ed è simmetrica intorno all'origine. Essa si chiama *iperbola* poichè la equazione di questa curva (n.° 12), per

$$M=-4a^2b^2,\ \Delta=-16a^4b^4,\ Y=2b^2x,\ X=-4a^2b^2y$$

si riduce alla forme discussa.

2.° $\Delta>0$, $p_1^2Y^2-p_2^2X^2+p_3^2=0$. Moltiplicandola per -1, si ottiene $p_2^2X^2-p_1^2Y^2-p_3^2=0$, equazione della medesima forma della precedente, e che perciò esprime anche essa una *iperbola*, però disposta diversamente rispetto agli assi. Infatti dei suoi rami, uno è volto dalla parte positiva dell'asse delle Y l'altro dalla parte negativa del medesimo asse, che tagliano in $X=\mp\frac{p_3}{p_1}=\mp\sqrt{\frac{A\,.\,\Delta}{M^2}}$.

3.° $\Delta=0$, $p_1^2Y^2-p_2^2X^2=0$. Questa immediatamente si decompone nelle due

$$p_1Y-p_2X=\frac{2Ay+Bx+D}{2\sqrt{A}}-\frac{Mx+N}{2\sqrt{-AM}}=0,$$

$$p_1Y+p_2X=\frac{2Ay+Bx+D}{2\sqrt{A}}+\frac{Mx+N}{2\sqrt{-AM}}=0,$$

equazioni che esprimono due rette concorrenti il cui punto d'intersezione è dato dalle coordinate:

$$x=-\frac{N}{M},\ y=\frac{MD-NB}{2AM}=\frac{2CD-BE}{M}.$$

III. Equazioni per cui $M=0$.

1.° $\Delta>0$, $p_1^2Y^2+p_2^2X=0$. Risoluta per Y si ha $Y=\pm\frac{p_2}{p_1}\sqrt{-X}$: attribuendo alla X tutti i valori compresi fra 0 e $-\infty$, si ottengono per Y valori reali a due a due eguali e di segno contrario; e se invece ad X si danno i valori compresi fra 0 e $+\infty$ si deducono per Y valori immaginari. Inoltre in $X=-\frac{p_1^2}{p_2^2}Y^2$ facendo variare Y da $\pm\infty$ a 0, X assume valori reali da $-\infty$ a 0. Conducendo infine per la origine una retta $Y-\alpha X=0$, le coordinate dei punti ove taglia la curva sono date da

$$X=0,\ Y=0,\ \text{ed}\ X=-\frac{p_2^2}{p_1^2\alpha^2},\ Y=-\frac{p_2^2}{p_1^2\alpha}$$

e corrispondono alla origine e ad un punto la cui posizione dipende da α e che è all'infinito per $\alpha=0$, cioè quando la secante coincide coll'asse coordinato $Y=0$. Laonde la curva è simmetrica intorno all'asse delle X, non a quello delle Y, ed ha un solo ramo infinito rivolto dalla parte negativa di X, e siccome l'equazione della parabola (n.° 13) si riduce a questa forma, per

$M=0$, $\Delta=16p^2$, $N=-8p$, $P=0$, $Y=y$, $X=-\frac{1}{4p}x$, tale curva si nominerà *parabola*.

2.° $\Delta=0$, $P<0$, $p_1^2Y^2-p_2^2=0$. Questa decomponendosi nelle due equazioni lineari in Y

$$p_1Y-p_2=\frac{(2Ay+Bx+D)}{2\sqrt{A}}-\sqrt{\frac{-P}{4A}}=0,$$

$$p_1Y+p_2=\frac{(2Ay+Bx+D)}{2\sqrt{A}}+\frac{\sqrt{-P}}{2\sqrt{A}}=0$$

esprime evidentemente un sistema di rette parallele.

3.° $\Delta=0$, $P>0$, $p_1^2Y^2+p_2^2=0$. La somma di due quadrati, fra cui uno è una quantità costante, dovendo annullarsi, questa equazione non può essere soddisfatta da alcun valore reale di Y; ne quindi ammette alcuna geometrica interpetrazione.

4.° $\Delta=0$, $P=0$, $p_1^2Y^2=0$. Immediatamente da questa si trae:

$$Y^2=\frac{1}{4A}(2Ay+Bx+D)^2=0,\ \text{da cui}\ 2Ay+Bx+D=0:$$

la linea espressa dalla data equazione si riduce ad una unica retta.

42. Le linee di secondo ordine si possono adunque classificare in tre generi essenzialmente distinti, ciascuno capace di alcuna varietà, secondochè sono da ogni parte limatate, o sono illimitate in due od una sola direzione. Quindi riepilogando si può comporre il quadro seguente:

Genere Ellisse $M>0$.

$\Delta>0$	Ellisse.
$\Delta=0$	Punto.
$\Delta<0$	Nulla.

Genere Iperbola $M<0$.

$\Delta\gtrless0$	Iperbola.
$\Delta=0$	Due rette concorrenti.

Genere parabola $M=0$.

$\Delta>0$		Parabola
$\Delta=0$	$P<0$	Due rette parallele.
	$P=0$	Una sola retta.
	$P>0$	Nulla.

Esempj.

43. Esempio I. *Ridurre l'equazione* $4y^2-3xy+5x^2-3y-2x+1=0$, *riferita ad assi ortogonali, alla sua forma più semplice e quindi discuterla.*

Avendo $M=71$, $\Delta=8$, $N=-25$, prendendo per nuovi assi $8y-3x-3=8Y=0$, $71x-25=142X=0$ (che chiudono un angolo di $20^0.33'.27'',76$ ed hanno per origine il punto $x=\frac{25}{71}$, $y=\frac{36}{71}$) la data equazione diviene $Y^2+\frac{71}{4}X^2-\frac{8}{71}=0$, che esprime una *ellisse.* Questa è compresa entro il parallelogrammo i cui lati opposti sono rispettivamente paralleli a ciascuno degli assi ed hanno per equazioni

$$Y=\pm\sqrt{\frac{8}{71}}=\pm0,336,\quad X=\pm\frac{\sqrt{32}}{71}=\pm0,08.$$

Esempio II. *Determinare la linea rappresentata dall' equazione* $4y^2-xy+x^2-y+2x+1=0$ *riferita ad assi obliquangoli qualunque.*

Poichè con $M=15$, si ha $\Delta=0$, essa esprime un punto avente per coordinate $y=0$, $x=-1$.

Esempio III. *Determinarè la linea rappresentata dall' equazione* $3y^2-xy+x^2+y-3x+8=0$, *riferita ad assi obliquangoli qualunque.*

Poichè con $M=1$, si ha $\Delta=-57$, essa niente significa.

Esempio IV. *Ridurre l'equazione* $2y^2-6xy+4x^2+y-2x+1=0$, *riferita ad un sistema di assi comprendenti un angolo di* 60^0, *alla sua forma più semplice e quindi discuterla.*

Avendo $M=-4$, $\Delta=4$, $N=-2$, preso per nuovi assi le rette $4y-6x+1=4Y=0$, $4x+2=8X=0$ (che chiudono un angolo di $36.^0 35' 12'',41$, ed hanno per origine il punto $x=-\frac{1}{2}$

$y=-1$) la data equazione si trasforma nella $Y^2-2X^2+1=0$ che esprime una *iperbola*. Questa ha uno dei suoi rami nello spazio indefinito compreso fra le tre rette $Y+\sqrt{2}.X=0$, $Y-\sqrt{2}.X=0$, $X=+0,707$; l'altro ramo in quello indefinito compreso pure fra le tre rette $Y+\sqrt{2}.X=0$, $Y-\sqrt{2}.X=0$, $X=-0,707$.

Esempio V. *Ridurre l'equazione* $3y^2-xy-x^2+y-3x-8=0$, *riferita ad assi ortogonali, alla sua forma più semplice e quindi discuterla.*

Avendo $M=-13$, $\Delta=-81$, $N=-17$, preso per nuovi assi le rette $6y-x+1=6Y=0$, $13x+17=26X=0$, (che chiudono un angolo di $9^0.27'.44''$, 36 ed hanno per origine il punto $x=-\frac{17}{13}$, $y=-\frac{8}{39}$), l'equazione trasformata è $Y^2-\frac{13}{3}X^2-\frac{81}{13}=0$, che esprime una *iperbola*. Uno dei suoi rami è chiuso nello spazio indefinito determinato dalle rette

$$Y-\sqrt{4,333}\,.\,X=0,\ \ Y+\sqrt{4,333}\,.\,X=0,\ \ Y=\frac{9}{\sqrt{13}}$$

e l'altro ramo è chiuso dallo spazio indefinito parimente determinato dalle rette

$$Y-\sqrt{4,333}\,.\,X=0,\ \ Y+\sqrt{4,333}.X=0,\ \ Y=-\frac{9}{\sqrt{13}}.$$

Esempio VI. *Determinare la linea espressa dalla equazione* $6y^2-xy-15x^2+y+11x-2=0$ *riferita ad assi ortogonali.*

Essendo $M=-361$, $N=133$, $\Delta=0$, la data equazione rappresenta le due rette concorrenti

$$\frac{12y-x+1}{2\sqrt{6}}-\frac{133-361x}{2\sqrt{6\,.\,361}}=0,\ \ \frac{12y-x+1}{2\sqrt{6}}+\frac{133-361x}{2\sqrt{6\,.\,361}}=0;$$

o

$$2y+3x-1=0,\ \ 3y-5x+2=0.$$

Esempio VII. *Ridurre l'equazione*

$$4y^2-4xy+x^2+2y-3x+1=0$$

[illegible]ta, ad assi ortogonali alla sua forma più semplice e quindi dis-c[illegible].

Avendo $M=0$, $\Delta=16$, $N=-16$, $P=12$, preso per nuovi assi le rette $2(4y-2x+1)=8Y=0$, $4(3-8x)=256X=0$ (comprendenti fra loro un angolo di $26^0.33'.54'',18$ ed avendo per origine il punto $x=0,375$, $y=0,0625$) l' equazione della curva diviene $Y^2+4X=0$. Questa è una *parabola* volta dalla parte in cui si contano le x negative e che passa per l'origine delle coordinate.

Esempio VIII. *Determinare la linea espressa dall' equazione riferita ad assi rettangolari* $8y^2+24xy+18x^2-22y-33x+5=0$.

Poichè con $M=0$, si ha pure $\Delta=0$, $N=0$ e $P=-324$, l' equazione proposta rappresenta la due rette parallele,

$$8Y-9=0,\ 8Y+9=0,\ \text{o}\ 2y+3x-5=0,\ 4y+6x-1=0.$$

Esempio IX. *Determinare la natura della linea espressa dalla equazione* $y^2+6xy+9x^2-2y-6x+26=0$ *riferita ad assi rettangolari.*

Essa diviene, per $M=0$, $\Delta=0$ e $P=100$, $Y^2+25=0$, e quindi nulla significa geometricamente.

Esempio X. *Definire la linea data dall' equazione* $9y^2-30xy+25x^2+42y-70x+49=0$ *riferita ad un sistema ortogonale.*

Annullandosi M, N e P, l'equazione rappresenta l' unica retta $3y-5x+7=0$.

Esercizi.

Determinare la natura delle linee le quali, indicando con θ l' angolo del sistema d' assi, sono espresse dalle equazioni

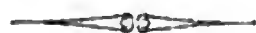
$$4y^2+12xy+17x^2-8y-28x-20=0,\qquad \theta=60.^0$$
$$5y^2-4xy+3x^2+7y-2x-4=0,\qquad \theta=90.^0$$

$4y^2+4xy+2x^2-8y-6x+5=0,$	$\theta=45.°$
$y^2-8xy+20x^2-y+4x+6=0,$	$\theta=90.°$
$3y^2-2xy-5x^2-7x=0,$	$\theta=30.°$
$2y^2+4xy-x^2+3x-2y=0,$	$\theta=90.°$
$y^2-6xy+8x^2-4y+12x-3=0,$	$\theta=60.°$
$6y^2-7xy-5x^2-13y+52x-63=0,$	$\theta=30.°$
$4xy-7x^2-5x+2=0,$	$\theta=90.°$
$3xy-3y-4x+7=0,$	$\theta=45.°$
$y^2-2xy+x^2-4y+3x-1=0,$	$\theta=90.°$
$y^2-4xy+4x^2+3y-2x+2=0,$	$\theta=45.°$
$b^2x^2-2abxy+a^2y^2-2ab^2x-2ba^2y+a^2b^2=0,$	θ qualunque
$36y^2+36xy+9x^2+21x+42y-44=0,$	$\theta=90.°$



CAPITOLO VI.

Proprietà generali delle linee di secondo ordine.



44. Per sviluppare ordinatamente tutto che si attiene alla forma, alla grandezza, alla posizione e ai limiti delle linee di secondo ordine fa d'uopo premettere alcuni lemmi.

LEMMA I. *Trasformare l' equazione generale delle linee di secondo ordine*

$$(1) \qquad Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=F(x,y)=0$$

da un sistema di assi qualunque ad assi paralleli condotti per la nuova origine (a, b).

Per formare l'equazione trasformata si deve nella (1) porre $x+a$, $y+b$ invece di x e di y: si ottiene

$$(2) \qquad Ay^2+Bxy+Cx^2+D'y+E'x+F'=0$$

in cui

$$(3) \qquad \begin{cases} D'=2Ab+Ba+D=F'_y(a,b) \\ E'=Bb+2Ca+E=F'_x(a,b) \\ F'=Ab^2+Bab+Ca^2+Db+Ea+F \\ \quad =\frac{1}{2}\cdot\left[bD'+aE'+Db+Ea+2F\right]=F(a,b). \end{cases}$$

LEMMA II. *Determinare le intersezioni di una retta con una linea di secondo ordine.*

I.° La secante sia condotta per l'origine delle coordinate. In-

dicando con θ l'angolo del sistema, con α e β gli angoli che la retta respettivamente forma cogli assi delle x e delle y, con ρ il raggio vettore di un suo punto qualunque $M(x, y)$, la retta può esprimersi mediante le due equazioni

$$(4) \qquad x = m\rho,\ y = n\rho,\ \text{in cui}\ m = \frac{sen\,\beta}{sen\,\theta},\quad n = \frac{sen\,\alpha}{sen\,\theta}.$$

Quindi i raggi vettori dei punti d'intersezione della secante colla linea rappresentata dalla (1) sono determinati dalla equazione

$$(5) \qquad \rho^2.(Am^2 + Bmn + Cn^2) + \rho(Dm + En) + F = 0.$$

II.° La secante sia condotta per il punto qualunque (a, b). In questo trasportando l'origine di un sistema di assi paralleli ai primitivi, la secante è allora espressa dalla (4) e la linea dalla (2): cosicchè per la determinazione dei raggi vettori si ottiene la equazione

$$(6) \qquad \rho^2(Am^2 + Bmn + Cn^2) + \rho(D'm + E'n) + F' = 0.$$

45.* Sia la funzione omogenea di secondo grado a tre variabili $F(x,y,z) = Ay^2 + Byx + Cx^2 + Dyz + Exz + Fz^2$, la quale per $z = 1$ eguaglia il primo membro dell'equazione generale delle curve di secondo ordine; nominasi suo *discriminante* quella funzione delle costanti A, B, C, D, E, F che si ottiene eliminando le variabili x, y, z fra le tre derivate di **F** prese rispetto a ciascuna di queste ed eguagliate a zero

$$F'_y = 2Ay + Bx + Dz = 0,\ F'_x = By + 2Cx + Ez = 0,\ F'_z = Dy + Ex + 2Fz = 0.$$

Quindi il discriminante è

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 2A, & B, & D \\ B, & 2C, & E \\ D, & E, & 2F \end{vmatrix} = 8ACF - 2AE^2 - 2FB^2 + 2BDE - 2CD^2 = -2\Delta.$$

Lemma III. Se la funzione $F(x,y)=Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F$, mediante la sostituzione lineare

$$(1)\qquad x=\alpha_1 Y+\alpha_2 X+\alpha_3\,,\quad y=\beta_1 Y+\beta_2 X+\beta_3\,,$$

si trasforma nella

$$F_1(X,Y)=A'Y^2+B'XY+C'X^2+D'Y+E'X+F',$$

il discriminante di questa è eguale a quello della primitiva moltiplicato per il numero $\left[(\beta_1\alpha_2)\right]^2$, ovvero

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} 2A, & B, & D \\ B, & 2C, & E \\ D, & E, & 2F \end{vmatrix} = (\beta_1\alpha_2)^2 . \begin{vmatrix} 2A', & B', & D' \\ B', & 2C', & E' \\ D', & E', & 2F' \end{vmatrix} \quad \text{ossia } \Delta'=(\beta_1\alpha_2)^2.\Delta.$$

Avendo per brevità posto

$$\begin{aligned} 2A.\beta_1+B.\alpha_1 &=A_1, & B.\beta_1+2C.\alpha_1 &=B_1, & D\beta_1+E\alpha_1 &=C_1 \\ 2A.\beta_2+B.\alpha_2 &=A_2, & B.\beta_2+2C.\alpha_2 &=B_2, & D\beta_2+E\alpha_2 &=C_2 \\ 2A.\beta_3+B.\alpha_3+D &=A_3, & B.\beta_3+2C.\alpha_3+E &=B_3, & D\beta_3+E\alpha_3+2F &=C_3 \end{aligned}$$

i coefficienti della trasformata si possono scrivere

$$\begin{aligned} 2A' &=A_1.\beta_1+B_1.\alpha_1, & B' &=A_2.\beta_1+B_2.\alpha_1=A_1.\beta_2+B_1.\alpha_2 \\ 2C' &=A_2.\beta_2+B_2.\alpha_2, & D' &=A_3.\beta_1+B_3.\alpha_1=A_1.\beta_3+B_1.\alpha_3+C_1 \\ 2F' &=A_3.\beta_3+B_3.\alpha_3+C_3, & E' &=A_3\beta_2+B_3.\alpha_2=A_2.\beta_3+B_2.\alpha_3+C_2 \end{aligned}$$

e quindi il suo discriminante è

$$\begin{vmatrix} A_1.\beta_1+B_1.\alpha_1, & A_1\beta_2+B_1.\alpha_2, & A_1\beta_3+B_1\alpha_3+C_1 \\ A_2.\beta_1+B_2\alpha_1, & A_2\beta_2+B_2\alpha_2, & A_2\beta_3+B_2\alpha_3+C_2 \\ A_3.\beta_1+B_3.\alpha_1, & A_3\beta_2+B_3\alpha_2, & A_3\beta_3+B_3\alpha_3+C_3 \end{vmatrix},$$

il quale per la moltiplicazione dei determinanti (*Algebra*) eguaglia il prodotto dei due fattori

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \beta_1, & \alpha_1, & 0 \\ \beta_2, & \alpha_2, & 0 \\ \beta_3, & \alpha_3, & 1 \end{vmatrix}.$$

Ma poichè si ha similmente

$$\begin{vmatrix} 2A\beta_1+B\alpha_1, & B\beta_1+2C\alpha_1, & D\beta_1+E\alpha_1 \\ 2A.\beta_2+B\alpha_2, & B\beta_2+2C\alpha_2, & D\beta_2+E\alpha_2 \\ 2A.\beta_3+B\alpha_3+D, & B\beta_3+2C\alpha_3+E, & D\beta_3+E\alpha_3+2F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2A, & B, & D \\ B, & 2C, & E \\ D, & E, & 2F \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \beta_1, & \alpha_1, & 0 \\ \beta_2, & \alpha_2, & 0 \\ \beta_3, & \alpha_3, & 1 \end{vmatrix}$$

ed essendo $\begin{vmatrix} \beta_1, & \alpha_1, & 0 \\ \beta_2, & \alpha_2, & 0 \\ \beta_3, & \alpha_3, & 1 \end{vmatrix} = (\beta_1\,\alpha_2),$

si giunge immediatamente colla sostituzione alla equazione (2).

Corollario I. La espressione $M' = \begin{vmatrix} 2A', & B' \\ B', & 2C' \end{vmatrix}$ si deduce da $M = \begin{vmatrix} 2A, & B \\ B, & 2C \end{vmatrix}$ per la relazione (3) $M' = (\beta_1\alpha_2)^2 . M$, la quale si può stabilire con un processo analitico identico al precedente.

Corollario II. Dalle espressioni di A', B', C' mediante A, B, C,

$$A' = A\beta_1^2 + B\alpha_1\beta_1 + C\alpha_1^2,\quad B' = 2A\beta_1\beta_2 + B(\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2) + 2C\alpha_1\alpha_2,$$

$C' = A\beta_2^2 + B\alpha_2\beta_2 + C\alpha_2^2$ si traggono per A, B, C, i valori:

$$(4)\qquad \begin{aligned} A(\beta_1\alpha_2)^2 &= A'\alpha_2^2 - B'\alpha_1\alpha_2 + C'\alpha_1^2, \\ B(\beta_1\alpha_2)^2 &= -2A'\alpha_2\beta_2 + B'(\beta_1\alpha_2 + \beta_1\alpha_2) - 2C'\alpha_1\beta_1, \\ C(\beta_1\alpha_2)^2 &= A'\beta_2^2 - B'\beta_1\beta_2 + C'\beta_1^2. \end{aligned}$$

Corollario III. Se la sostituzione lineare (1), si identifica con quella per cui da un sistema d' assi obliquangoli si passa ad altro parimente obliquangolo (n.° 22), e perciò se si ha $\alpha_1 = sen(\theta - \beta) : sen\,\theta$, $\alpha_2 = sen\,(\theta - \alpha) : sen\,\theta$, $\alpha_3 = a$, $\beta_1 = sen\,\beta : sen\,\theta$, $\beta_2 = sen\,\alpha : sen\,\theta$, $\beta_3 = b$, moltiplicando la seconda delle (4) per $-cos\,\theta$, e quindi membro a

membro addizionandole, si deduce:

$$\left[A+C-B\cos\theta\right](\beta_1\alpha_2)^2=A'\left[\alpha_2^2+\beta_2^2+2\alpha_2\beta_2\cos\theta\right]-$$

$$B'\left[\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-(\beta_1\alpha_2+\beta_2\alpha_1)\cos\theta\right]+C'\left[\alpha_1^2+\beta_1^2+2\alpha_1\beta_1\cos\theta\right].$$

E siccome $(\beta_1\alpha_2)^2=\dfrac{sen^2(\beta-\alpha)}{sen^2\theta}$, $\alpha_1^2+\beta_1^2+2\alpha_1\beta_1\cos\theta=1$,

$\alpha_2^2+\beta_2^2+2\alpha_2\beta_2\cos\theta=1$, $(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2)-(\beta_1\alpha_2+\beta_2\alpha_1)\cos\theta=\cos(\beta-\alpha)$,

essa diviene

$$(5)\qquad \frac{A+C-B\cos\theta}{sen^2\theta}=\frac{A'+C'-B'\cos\Theta}{sen^2\Theta},\quad \text{in cui } \beta-\alpha=\Theta.$$

Inoltre in questo caso le (2) e (3) sono

$$(6)\qquad \frac{\Delta'}{sen^2\Theta}=\frac{\Delta}{sen^2\theta};\quad \frac{M'}{sen^2\Theta}=\frac{M}{sen^2\theta}.$$

Centro.

46. *Condotta una secante la quale tagli in a_1 e in a_2 una linea di secondo ordine il segmento a_1a_2 compreso fra questi due punti d'intersezione nominasi* corda. Centro *poi della linea é quel punto in cui ogni corda per esso condotta è bisecata.*

Teorema. *Affinchè l'origine delle coordinate sia centro della linea* $F(x,y)=0$ *è necessario e sufficiente che abbiano luogo le condizioni* (1) $D=0$ $E=0$.

Infatti la corda $x=m\rho$, $y=n\rho$ (in cui m, n, sono numeri qualunque) è bisecata nell'origine se i due raggi vettori dati dall'equa-

zione (5) n.° 44 sono eguali e di segno contrario, qualunque siano *m* ed *n* e perciò se D=0 ed E=0.

Problema. *Determinare le coordinate del centro della linea di secondo ordine* $F(x,y)=0$.

Trasportando gli assi parallelamente a se stessi, si possono determinare le coordinate arbitrarie della nuova origine (a, b) per modo che nella equazione trasformata n.° 44, siano soddisfatte le condizioni (1) per cui la nuova origine coincide col *centro*. Laonde risolvendo per *a*, e per *b* le equazioni lineari: $2Ab+Ba+D=0$, $Bb+2Ca+E=0$, si ottengono per le coordinate del centro le espressioni:

$$(2) \quad b=\frac{BE-2CD}{4AC-B^2}=\frac{MD-NB}{2AM} \qquad a=\frac{BD-2AE}{4AC-B^2}=-\frac{N}{M}.$$

Corollario I. Ad M diverso da zero corrispondendo i generi, *ellisse* ed *iperbola*, ed avendo in questo caso per *a* e per *b* valori finiti, si deduce che queste curve hanno sempre un *unico centro*. Inoltre per le espressioni (2) resulta che l'equazione trasformata (6) del n.° 40 è riferita ad un sistema di assi la cui origine coincide col centro delle linee da essa rappresentate.

Corollario II. Ad $M=0$, ed N diverso da zero corrispondendo la *parabola*, e per tali condizioni i valori di *a* e di *b* divenendo infiniti, resulta evidentemente esser questa curva priva di centro.

Corollario III. Ad $M=0$, ed $N=0$, $P<0$ corrispondendo due rette parallele, e in conseguenza i valori di *b* e di *a* divenendo indeterminati ma tali che hanno il rapporto costante $b:a=B:2A$, resulta come tale sistema espresso dalle equazioni (8) n.° 40 abbia un numero indefinito di centri, però tutti situati su di una retta parallela ed equidistante con quelle del sistema. Quando questo si riduce ad una unica retta, essendo $P=0$, con cotesta coincide la linea dei centri.

Corollario IV. Sostituendo ad *a* e *b* le espressioni (2) nella equazione trasformata (2) del n.° 44 e notando essere

$$F'=\frac{1}{2}(Db+Ea+2F) \text{ ovvero } F'=-\frac{\Delta}{M},$$

si ottiene per equazione generale delle curve di secondo ordine dotate di centro, in questo essendo trasferita l'origine del nuovo sistema di assi paralleli ai primitivi, la

$$(3) \qquad Ay^2+Bxy+Cx^2=\frac{\Delta}{M}.$$

Diametri.

47. Diametro *di una linea di secondo ordine dicesi quella linea che biseca un sistema di corde parallele: queste poi sono chiamate* ordinate.

Problema. *Essendo* $F(x.y)=0$ *l'equazione generale delle linee di secondo ordine, ed* (1) $my=nx+l$ *quella di una retta data, determinare l'equazione del diametro relativo ad un sistema di corde ad essa parallele.*

Rappresentando con (x, y) le coordinate di un punto qualunque **M** del diametro, è evidente che se in questo punto si trasporta l'origine di un sistema d'assi coordinati paralleli ai primitivi, e se per tale origine si conduce la corda $y=n\rho$, $x=m\rho$ parallela alla (1), questa vi è bisecata. Laonde, poichè la (1) n.° **44** deve dare per ρ due valori eguali e di segno contrario, fra le x, y ha luogo la relazione

$$(2) \quad n(2A.y+Bx+D)+m(By+2Cx+E)=nF'_y+mF'_x=0 \text{ ovvero}$$

$$(3) \qquad y(2An+Bm)+x(Bn+2Cm)+(Dn+Em)=0$$

la quale è l'equazione cercata.

Corollario I. La (2) essendo di primo grado in x, y esprime una retta che passa sempre per il punto d'intersezione delle

$$2Ay+Bx+D=F'_y=0 \quad By+2Cx+E=F'_x=0,$$

(che sono diametri i quali respettivamente corrispondono alle corde parallele all'asse delle y, e a quello delle x) che è il *centro* della linea. Quindi *per le curve di secondo ordine dotate di centro*, *ogni diametro passa per esso.*

Corollario II. Le rette espresse da $F'_y=0$, $F'_x=0$, per $M=0$, sono parellele poichè, per $B=2\sqrt{AC}$, le loro equazioni divengono

$$F'_y=2\sqrt{A}\left(y\sqrt{A}+x\sqrt{C}\right)+D=0,\ F'_x=2\sqrt{C}\left(y\sqrt{A}+x\sqrt{C}\right)+E=0;$$

ad esse è pure parallelo il diametro qualunque (2), la cui equazione in questo caso è

$$2\left(y\sqrt{A}+x\sqrt{C}\right)\left(n\sqrt{A}+m\sqrt{C}\right)+\left(Dn+Em\right)=0.$$

Pertanto tutti i diametri di una parabola sono paralleli.

Corollario III. Indicando con φ l'angolo che il diametro (3) fa colle sue ordinate o con la retta $my-nx=0$, e con θ l'angolo del sistema d'assi coordinati, posto $\frac{n}{m}=a$, si ottiene

$$(4)\qquad tang\,\varphi=\frac{2(Aa^2+Ba+C)\,sen\,\theta}{B(1-a^2)+2a(A-C)-2(C-Aa^2)\cos\theta}$$

e per $\theta=90^\circ$

$$(5)\qquad tang\,\varphi=\frac{2(Aa^2+Ba+C)}{B(1-a^2)+2a(A-C)}.$$

48. *Diconsi* Assi *di una linea di secondo ordine quei diametri che sono perpendicolari alle loro ordinate.*

Problema. *Essendo* $F(x, y)=0$ *l'equazione generale delle linee di secondo ordine determinare le equazioni dei loro assi.*

Per definizione dovendo essere $\varphi=90^\circ$, la quantità a deve soddisfare all'equazione:

$$a^2(2A\cos\theta-B)+2a(A-C)+(B-2C\cos\theta)=0;$$

cosicchè avendo posto

(1) $$A+C-\cos\theta=\delta,$$

essa ha per valori le espressioni:

(2) $$a=\frac{(C-A)\pm\sqrt{\delta^2-M\,sen^2\theta}}{2A\cos\theta-B}.$$

Gli assi vengono adunque rappresentati da

(3) $$(2A\cos\theta-B)F'_x+\left[(C-A)\pm\sqrt{\delta^2-M\,sen^2\theta}\right].F'_y=0,$$

ovvero se $\theta=90^\circ$ da

(4) $$B.F'_x-\left[(C-A)\pm\sqrt{(A-C)^2+B^2}\right].F'_y=0.$$

La quantità $\delta^2-M\,sen^2\theta=(A-C)^2+(B-2A\cos\theta)(B-2C\cos\theta)$ essendo positiva per $\theta=0$, a cui corrisponde il massimo valore di $\cos\theta$, rimane sempre positiva per qualunque valore di θ: di guisa che i due valori di a sono sempre reali.

Corollario I. Sia M diverso da zero, e siano a_1, a_2 i due valori (2), le equazioni delle corde condotte per l'origine respettivamente parallele ai due assi sono: $y-a_1x=0$, $y-a_2x=0$.

E siccome la quantità, $1+(a_1+a_2)\cos\theta+a_1a_2$, per le espressioni (2) identicamente si annulla, tali corde e per conseguenza gli assi che ad esse corrispondono sono respettivamente perpendicolari. Quindi *le curve di secondo ordine dotate di centro ammettono due assi che in questo si tagliano ad angolo retto.*

Corollario II. Sia $M=0$, le (3) allora si trasformano nelle

$$2\left(y\sqrt{A}+x\sqrt{C}\right)\left(\sqrt{C}+a\sqrt{A}\right)+\left(E+aD\right)=0;$$

in cui, per le (2), a prende successivamente i valori

$$-\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}}\,,\ -\frac{\sqrt{A}-\sqrt{C}\cos\theta}{\sqrt{A}\cos\theta-\sqrt{C}}.$$

E quindi per esse si hanno le equazioni:

$$2\sqrt{A}(y\sqrt{A}+x\sqrt{C})+(E\sqrt{A}-D\sqrt{C}):0=0$$

(5) $$-2\delta(\sqrt{A}\cos\theta-\sqrt{C})(y\sqrt{A}+x\sqrt{C})+\Big(\sqrt{A}(E\cos\theta-D)+\sqrt{C}(D\cos\theta-E)\Big)=0:$$

la prima delle quali avendo la quantità indipendente da x e da y infinita, e perciò non potendo esser soddisfatta da valori finiti di x e di y nulla esprime; perciò *la parabola ammette un unico asse* dato dall'equazione (5).

Diametri conjugati.

49. *Diconsi* CONJUGATI *due diametri di una linea di secondo ordine dotata di centro di cui ciascuno biseca un sistema di corde parallele all'altro.*

TEOREMA I. *Se due diametri di una linea di secondo ordine sono tali che uno di essi bisseca tutte le corde parallele all'altro, reciprocamente l'altro biseca tutte le corde parallele al primo, e quindi sono conjugati.*

L'equazione del diametro che biseca le corde parallele alla retta $y-ax=0$ è

$$y(2Aa+B)+x(Ba+2C)+(Da+E)=0;$$

e quello relativo alla retta $y-a'x=0$

$$y(2Aa'+B)+x(Ba'+2C)+(Da'+E)=0.$$

La condizione affinchè il primo diametro sia parallelo alle ordinate del secondo essendo

$$(1) \qquad 2Aaa'+B(a+a')+2C=0$$

e questa rimanendo inalterata permutandovi a in a' apparisce evidente come essa sia pure la condizione per cui il secondo diametro resulta parallelo alle ordinate del primo.

Corollario I. *Gli assi delle curve di secondo ordine dotate di centro sono diametri conjugati ad angolo retto.* Infatti gli assi essendo dati dalla (3) n.° 48, la relazione (1) per le

$$a+a'=\frac{2(C-A)}{2A\cos\theta-B}\,;\quad aa'=\frac{B-2C\cos\theta}{2A\cos\theta-B}$$

identicamente si annulla.

Teorema II. *Se nell'equazione generale di una linea di secondo ordine il coefficiente del termine in xy è nullo, gli assi coordinati sono respettivamente paralleli a due diametri conjugati.*

Infatti il diametro che biseca corde parallele all'asse delle x, $y=0$, essendo dato da $2Cx+E=0$ resulta parallelo all'asse delle y ed il diametro le cui ordinate sono parallele all'asse delle y, $x=0$, avendo per equazione $2Ay+D=0$ è parallelo all'asse delle x. Per conseguenza in questo caso gli assi coordinati sono paralleli ai due diametri conjugati.

Corollario. L'equazione trasformata (6) del n.° 40

$$AY^2+\frac{M}{A}X^2-\frac{\Delta}{M}=0$$

che rappresenta curve di secondo ordine dotate di centro è riferita a due diametri conjugati.

50* Problema I. *Essendo*

$$(1) \qquad Ay^2+Bxy+Cx^2=\frac{\Delta}{M}$$

l'equazione generale delle linee di secondo ordine dotate di centro riferite ad un sistema di assi che in questo hanno l'origine e che formano un angolo θ, trasformarla in altra riferita a due diametri conjugati qualunque.

Posto $f=A\lambda^2-B\lambda+C$, si assumano per nuovi assi le rette $Y=0$, $X=0$ definite dalle equazioni:

$$(2) \qquad fy=\left(C-\frac{B}{2}\lambda\right)Y+\lambda X, \quad fx=\left(A\lambda-\frac{B}{2}\right)Y-X$$

o dalle equazioni

$$(3) \qquad Y=y+\lambda x=0, \quad X=\left(A\lambda-\frac{B}{2}\right)y-\left(C-\frac{B}{2}\lambda\right)x=0$$

le quali poichè i loro coefficienti soddisfanno alla relazione (1) n.° 49, esprimono due diametri conjugati.

Eliminando dalla (1) le x, y mediante la sostituzione (2) si ottiene per la trasformata richiesta l'equazione:

$$(4) \qquad \frac{M}{4f}Y^2+\frac{1}{f}X^2-\frac{\Delta}{M}=0.$$

Corollario I. Denotando con Θ l'angolo dei diametri conjugati (3), per esso abbiamo la:

$$(5) \qquad tang\,\Theta=\frac{-f\,sen\,\theta}{\lambda^2\left(\frac{B}{2}-A\cos\theta\right)+\lambda(A-C)+\left(C\cos\theta-\frac{B}{2}\right)}$$

ovvero

$$(6) \qquad \lambda^2\left[\frac{B}{2}sen\Theta-A\,sen(\Theta-\theta)\right]+\lambda\left[(A-C)\,sen\,\Theta-B\,sen\theta\cos\Theta\right]$$
$$+\left[C\,sen\,(\Theta+\theta)-\frac{B}{2}sen\Theta\right]=0;$$

per mezzo della quale si può esprimere λ ed f per l'angolo Θ.

Risoluta la (6) per λ, avendo $A+C-B\cos\theta=\delta$, e posto

(7) $$R=\sqrt{sen^2\Theta.\delta^2-M\,sen^2\theta},$$

si ha

(8) $$\lambda=\frac{B\,sen\,\theta\cos\Theta-(A-C)\,sen\,\Theta\pm R}{B\,sen\,\Theta-2A\,sen\,(\Theta-\theta)}.$$

E dalla identità

$$f=A\left[\lambda-\frac{B}{2A}\right]^2+\frac{M}{4A}$$

si trae

(9) $$f=\frac{1}{4A}\left\{\left[\frac{sen\,\Theta(M-2A\delta)\pm 2AR}{B\,sen\,\Theta-2A\,sen\,(\Theta-\theta)}\right]^2+M\right\}.$$

Corollario II. Dalle formule precedenti rimane risoluto il problema: *Riferire una curva di secondo ordine espressa dalla* (1) *a due diametri conjugati che formano fra loro un angolo dato* Θ. Però a compiere la soluzione conviene discutere i valori di λ dati dalla (8).

1.° Sia $M>0$, la condizione necessaria e sufficiente affinchè questi siano reali è

(10) $$sen\,\Theta \overset{=}{>} \pm\frac{\sqrt{M}}{\delta}\cdot sen\,\theta \overset{=}{>} \frac{\sqrt{M:sen^2\theta}}{\delta:sen^2\theta}$$

quantità indipendente da θ, n 45, (in essa $\sqrt{M}<\delta$ per essere $\delta^2-M>0$): quindi nell'ellisse il minimo angolo che due diametri conjugati possono comprendere è $\psi=arcosen=\frac{\sqrt{M}}{\delta}sen\,\theta$, ed il massimo è $180^0-\psi$, e per ambedue corrisponde un unico sistema di diametri conjugati avendo per λ e per f un solo valore.

Per ogni valore di Θ che soddisfa alla (10) si ottengono per λ due valori reali e diseguali, λ_1 e λ_2, e siccome l'angolo φ for-

mato dai due diametri $y+\lambda_1 x=0$, $y+\lambda_2 x=0$ dato da $tang\,\varphi=\frac{R}{\delta\cos\Theta}$ è in generale diverso da Θ, si deduce che *nella ellisse esistono due sistemi differenti di diametri conjugati comprendenti ciascuno il medesimo angolo Θ, purchè questo sia compreso fra l'angolo minimo ed il massimo* (10), *e non sia eguale a* 90°.

Infatti per $\Theta=90^0$ avendo anche $\varphi=90^0$ si ha che nella ellisse evvi un solo sistema di diametri conjugati rettangolari, che corrispondono agli assi.

2.° Sia $M<0$, la quantità R essendo sempre reale, ad ogni valore di Θ corrispondono due valori reali per λ: per conseguenza *nella iperbola esistono due sistemi di diametri conjugati comprendenti ciascuno il medesimo angolo Θ, purchè questo non eguagli* 0 *o* 90° *o* 180.°

Infatti per $\Theta=0,=180^0$, annullandosi f, la sostituzione lineare (2) più non sussiste: per $\Theta=90^0$, avendo $\varphi=90^0$, i due sistemi si riducono in un solo.

Corollario III. Denotando con $\pm b_1^2$, $\pm a_1^2$ i quadrati delle lunghezze dei semi-diametri conjugati, reali od immaginari, lunghezze comprese fra il centro della linea ed uno dei punti di intersezione, reali od immaginari, in cui da ciascuno di essi è secata, avremo

$$(11)\qquad \pm b_1^2=\frac{4\Delta f}{M^2},\quad \pm a_1^2=\frac{f\Delta}{M}.$$

E per il Lemma III. n.° 45* hanno luogo le relazioni

$$\frac{\pm a_1^2 \pm b_1^2}{\pm a_1^2\times\pm b_1^2\times sen^2\Theta}=\frac{M\delta}{\Delta\, sen^2\theta},\quad \frac{4}{\pm a_1^2\times\pm b_1^2\times sen^2\Theta}=\frac{M^3}{\Delta^2 sen^2\theta},$$

donde immediatamente si traggono le

$$(12)\quad \pm a_1^2\pm b_1^2=\frac{4\Delta\delta}{M^2},\quad \pm a_1^2\times\pm b_1^2\times sen^2\Theta=\frac{4\Delta^2 sen^2\theta}{M^3}=\frac{4\Delta^2 : sen^4\theta}{M^3 : sen^6\theta}$$

in cui nei secondi membri sonovi quantità costanti od indipendenti da Θ e θ. Notando come per la ellisse le $\pm a_1^2$, $\pm b_1^2$ debbono essere ambedue positive, e per la iperbola devono avere segno contrario le (12) esprimono i seguenti Teoremi.

I.° Nella *Ellisse la somma dei quadrati dei due semi-diametri conjugati, e l' area del parallelogrammo su di essi costruito sono costanti.*

II.° *Nella Iperbola la differenza dei quadrati dei due semi-diametri conjugati e l' area del parallelogrammo su di essi costruito sono costanti.*

Corollario IV. Sia $a_1 = b_1$, le (12) divengono

$$\pm a_1^2 \pm a_1^2 = \frac{4\Delta\delta}{M^2},\quad \pm a_1^4 sen^2\Theta = \frac{4\,\Delta^2 sen^2\theta}{M^3}.$$

Per la ellisse da queste si deduce $sen^2\Theta = \frac{M\,sen^2\theta}{\delta^2}$, $a_1^2 = \frac{2\Delta\delta}{M^2}$

laonde *questa curva ammette un sistema di due diametri conjugati eguali che chiudono l' angolo minimo ed è rappresentata dalla equazione*

$$(13)\qquad Y^2 + X^2 = \frac{2\Delta\delta}{M^2}.$$

Se per ogni sistema di diametri conjugati si ha $\Theta = 90°$, e per la (5) sussiste la equazione

$$\lambda^2\left(\frac{B}{2} - A\cos\theta\right) + \lambda\left(A - C\right) + \left(C\cos\theta - \frac{B}{2}\right) = 0$$

qualunque sia λ, e perciò le condizioni

$$(14)\qquad A = C,\ B = 2A\cos\theta,$$

le quantità δ ed M divengono $\delta = 2A\,sen^2\theta$, $M = 4A^2 sen^2\theta$ e perciò la (7) è identicamente soddisfatta. Laonde in questo caso *la el-*

lisse si trasforma nella circonferenza di un circolo avente per raggio la quantità $\sqrt{\frac{\Delta}{4A^2 \, sen^2\theta}}$.

Per la iperbola, dovendo annullarsi la prima delle (12) in cui non entra l'angolo Θ si deduce che *essa in generale non ammette alcun sistema di diametri conjugati eguali.* Se però sussiste la condizione (15) $\delta=0$, allora essendo $a_1=b_1$ qualunque sia Θ, *la iperbola particolare che ne deriva nominata equilatera gode della proprietà d'avere tutti i sistemi di diametri conjugati eguali ed è rappresentata dall'equazione.*

$$(16)\qquad Y^2-X^2=\frac{2\Delta \, sen\theta}{\sqrt{-M^3}\times sen\,\Theta}$$

51.* Problema. *Essendo*

$$F(x,y)=Ay^2+Bxy+Cx^2=\frac{\Delta}{M}$$

l'equazione delle linee di secondo ordine riferite a due diametri che comprendono un angolo θ, *trasformarla assumendo per nuovi assi coordinati gli assi della curva.*

Avendo $\Theta=90^0$ si hanno per λ i due valori λ_1, λ_2:

$$\lambda=\frac{(C-A)\pm\sqrt{\delta^2-M sen^2\theta}}{B-2A\cos\theta};$$

e quindi indicando con R_1 la quantità $\sqrt{\delta^2-M\,sen^2\theta}$ i nuovi assi sono rappresentati dalle equazioni:

$$(1)\qquad Y=y+\frac{(C-A)+R_1}{B-2A\cos\theta}x=0,\quad X=y+\frac{(C-A)-R_1}{B-2A\cos\theta}x=0$$

in quantochè, n.° 50, ciascuna delle radici λ_1, λ_2, corrisponde ad uno degli assi e lo determina. Denotando con a, e b i due semiassi, l'equazione trasformata ha la forma:

(2) $$\pm\frac{1}{b^2}Y^2\pm\frac{1}{a^2}X^2=1$$

in cui per la ellisse si devono prendere i termini positivi, e per la iperbola uno positivo, l'altro negativo. A determinare a e b si adoperano le relazioni del n.º 45

$$\pm a^2\pm b^2=\frac{4\Delta\delta}{M^2},\ \pm a^2\times\pm b^2=\frac{4\Delta^2 sen^2\theta}{M^3}:$$

donde si deducono

(3) $$\pm b^2=\frac{2\Delta}{M^2}\cdot\left[\delta-R_1\right],\quad \pm a^2=\frac{2\Delta}{M^2}\cdot\left[\delta+R_1\right],$$

in cui R_1 ha il segno medesimo di cui è affetto nell' equazione dell'asse corrispondente.

Corollario I. Se il primitivo sistema di assi coördinati è ortogonale, $\theta=90^0$ le precedenti espressioni divengono più semplici, riducendosi alle:

(4) $$\begin{cases} Y=y+\dfrac{(C-A)+\sqrt{(C-A)^2+B^2}}{B}x=0, \\ X=y+\dfrac{(C-A)-\sqrt{(C-A)^2+B^2}}{B}x=0; \end{cases}$$

(5) $$\begin{cases} \pm b_1^2=\dfrac{2\Delta}{M^2}\left[(A+C)-\sqrt{(C-A)^2+B^2}\right] \\ \pm a_1^2=\dfrac{2\Delta}{M^2}\left[(A+C)+\sqrt{(C-A)^2+B^2}\right]. \end{cases}$$

Designato con α l'angolo che l'asse $Y=0$ forma col primitivo asse coordinato delle x, per le (4) si hanno

$$tang\ \alpha=-.\frac{(C-A)+\sqrt{(C-A)^2+B^2}}{B},$$

$$tang\,(90^0+\alpha)=-\frac{1}{tang\,\alpha}=-\,.\,\frac{(C-A)-\sqrt{(C-A)^2+B^2}}{B},$$

e quindi

$$(6)\qquad tang\;2\alpha=\frac{B}{C-A}\,.$$

Corollario II. Però quando $\theta=90^0$, si può direttamente pervenire all'equazione (2) adoperando le formule (3) del n.° 21 stabilite per cambiare un sistema ortogonale d'assi coordinati, in altro pure ortogonale, e determinando α in modo che la equazione trasformata non contenga il termine in XY.

Tangente.

52. *Una secante la quale tagliando una linea di secondo ordine nei due punti a_1, a_2, ruota intorno ad uno di essi a_1 per modo che l'altro a_2 di continuo al primo si avvicina prende il nome di* tangente *allorchè i due punti a_1 ed a_2 insieme coincidono. L'unico punto cui la tangente ha comune colla curva dicesi* punto di tangenza, o di contatto.

Problema I. *Essendo*

$$F(x,y)=Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

l'equazione generale delle linee di secondo ordine, ed $M(x_0y_0)$ *un punto qualunque su di esse, determinare l'equazione della tangente a tali linee che abbia per punto di contatto* M.

Prendendo la sostituzione lineare,

$$(1)\qquad x=X+x_0\,,\;y=Y+y_0\,;\;\text{ovvero}\;X=x-x_0\,,\;Y=y-y_0\,,$$

per cui si passa ad assi paralleli ai primitivi aventi l'origine in M, l'equazione $F(x,y)=0$ diviene:

$$(2)\qquad F(X,Y)=AY^2+BXY+CX^2+F'_{y_0}\,.\,Y+F'_{x_0}\,.\,X=0,$$

La secante condotta per la nuova origine **M** e definita dalle equazioni $Y=n\rho$, $X=m\rho$ taglia la curva in due punti a_1 ed a_2 i cui raggi vettori sono:

$$\rho=0\,,\ \rho(An^2+Bmn+Cm^2)+n\,.\,F'_{y_0}+mF'_{x_0}=0.$$

Essa diviene tangente in M, se ambo i raggi vettori si annullano e per ciò se $n:m$ soddisfa alla condizione: $nF'_{y_0}+mF'_{x_0}=0$.

Eliminando n ed m fra questa e le equazioni della retta, si ottiene a rappresantare la tangente riferita ai nuovi assi:

$$Y\,.\,F'_{y_0}+XF'_{x_0}=0\,;$$

e per le (1) riferendola al primitivo sistema la equazione:

$$(3)\qquad (y-y_0)\,.\,F'_{y_0}+(x-x_0)\,.\,F'_{x_0}=0\,.$$

Corollario. Il diametro che biseca un sistema di corde parallele alla tangente (3) è espresso dalla equazione:

$$(4)\qquad F'_{y_0}\,.\,F'_{x_0}-F'_{x_0}\,.\,F'_{y_0}=0\,,$$

ed il suo conjugato dalla:

$$(5)\qquad M\left[y\,.\,F'_{y_0}+xF'_{x_0}\right]+\left[M(Dy_0+Ex_0+2F)+2\Delta\right]=0.$$

E siccome resulta parallelo alla tangente si ha il

Teorema: *In una linea di secondo ordine dotata di centro, una tangente nella estremità di un diametro è parallela al diametro con questo conjugato.*

Problema II.* *Determinare le equazioni della tangente condotta alle linee di secondo ordine espresse dalla equazione generale* $F(x,y)=0$, *per un dato punto* $M(x_0, y_0)$ *ad esse esterno.*

Ponendo in M l'origine di un sistema di assi paralleli ai primitivi, e conducendo per esso una secante qualunque: $Y=n\rho$, $X=m\rho$,

i raggi vettori dei punti ove questa taglia la curva sono dati da

$$\rho^2(An^2+Bmn+Cm^2)+\rho\Big(nF'y_0+mF'x_0\Big)+F(x_0,y_0)=0.$$

Pertanto la condizione necessaria e sufficiente affinchè la secante divenga tangente s'identifica con quella per cui l'ultima equazione ha radici eguali: quindi è

$$n^2\left[\left(F'_{y_0}\right)^2-4A\,F(x_0,y_0)\right]+2\,mn\left[F'_{y_0}\,F'_{x_0}-2BF(x_0,y_0)\right]$$
$$+m^2\left[\left(F'_{x_0}\right)^2-4CF(x_0,y_0)\right]=0,$$

da cui eliminando m ed n, e ritornando al primitivo sistema di assi, si ottiene la equazione

$$(y-y_0)^2\left[\left(F'_{y_0}\right)^2-4AF(x_0,y_0)\right]+2(y-y_0)(x-x_0)\left[F'_{y_0}\,F'_{x_0}\right.$$
$$\left.-2BF(x_0,y_0)\right]+(x-x_0)^2\left[\left(F'_{x_0}\right)^2-4CF(x_0,y_0)\right]=0,$$

ovvero la

$$(6)\left[(y-y_0)F'_{y_0}+(x-x_0)F'_{x_0}\right]^2-4F(x_0,y_0)\times\left[A(y-y_0)^2+B(x-x_0)(y-y_0)\right.$$
$$\left.+C(x-x_0)^2\right]=0,$$

la quale, essendo di secondo grado ed omogenea in x ed in y, rappresenta le due tangenti condotte per M.

Notando essere

$$(y-y_0)F'_{y_0}+(x-x_0)F'_{x_0}=\left[yF'_{y_0}+xF'_{x_0}+(Dy_0+Ex_0+2F)\right]-2F(x_0,y_0),$$

la (6) può anche scriversi

$$(7) \qquad \left[yF'_{y_0}+xF'_{x_0}+(Dy_0+Ex_0+2F)\right]^2-4F(x_0,y_0)\times F(x,y)=0.$$

PROBLEMA III.* *Determinare la condizione necessaria e sufficiente affinchè la retta espressa dalla equazione:* $ly+mx+n=0$ *sia tangente ad una linea di secondo ordine significata dalla equazione generale* $F(x,y)=0$.

Eliminando y fra le equazioni della retta e della linea, si ottiene una equazione di secondo ordine in x

$$x^2(Am^2-Bml+Cl^2)+x(2Amn-Bnl-Dml+El^2)+(An^2-Dnl+Fl^2)=0$$

le cui radici sono le ascisse dei punti d'intersezione della retta con la curva. E dovendo quella essere tangente, conviene che tale equazione abbia le sue radici eguali, ovvero

$$(2Amn-Bnl-Dml+El^2)^2=4(Am^2-Bml+Cl^2)\ (An^2-Dnl+Fl^2)$$

Sviluppando ed ordinando, tolto il fattore comune l^2, la condizione cercata è

$$(8) \qquad l^2(4CF-E^2)+m^2(4AF-D^2)+n^2(4AC-B^2)$$
$$+2mn(BD-2AE)+2nl(BE-2CD)+2ml(DE-2BF)=0.$$

COROLLARIO I.* Indicando con P il discriminante (n.° 45*) della $F(x,y)$ e con $P_{\alpha\cdot\beta}$ uno qualunque dei determinanti minori dedotti da P sopprimendovi la linea designata dal primo indice α, e la colonna designata dal secondo β, e affetto del segno $+$ se ambo gli indici sono insieme numeri pari o dispari, dal segno $-$ se uno è pari e l'altro è dispari, la (8) può anche scriversi

$$(9) \qquad l^2P_{1\cdot1}+m^2P_{2\cdot2}+n^2P_{3\cdot3}+2mnP_{2\cdot3}+2nlP_{1\cdot3}+2mlP_{1\cdot2}=0,$$

essendo

$$P_{2\cdot3}=P_{3\cdot2},\ P_{1\cdot3}=P_{3\cdot1},\ P_{1\cdot2}=P_{2\cdot1}.$$

Corollario II.* Le condizioni necessarie e sufficienti affinchè gli assi coordinati $y=0, x=0$ siano tangenti alla curva $F(x,y)=0$ sono

$$(10)\qquad 4CF-E^2=0,\ 4AF-D^2=0\,.$$

Corollario III.* Mediante la (8) si potrebbero determinare le equazioni delle tangenti condotte da un punto dato, o parallelamente ad una data retta.

35.* Problema IV. *Essendo*

$$(1)\qquad F(x,y)=(y\sqrt{A}+x\sqrt{C})^2+Dy+Ex+F=0\,,$$

l' equazione generale della parabola riferita ad un sistema di assi che comprendono un angolo θ, *trasformarla in altra assumendo per nuovi assi coordinati una tangente alla curva ed il diametro condotto per il suo punto di tangenza.*

Avendo identicamente

$$F(x,y)=\left(y\sqrt{A}+x\sqrt{C}+\lambda\right)^2+\left[y(D-2\lambda\sqrt{A})+x(E-2\lambda\sqrt{C})+F-\lambda^2\right]$$

si prendano per nuovi assi $Y=0$, $X=0$ le rette definite dalle equazioni

$$(2)\ Y\sqrt{A'}=y\sqrt{A}+x\sqrt{C}+\lambda; XE'=y(D-2\lambda\sqrt{A})+x(E-2\lambda\sqrt{C})+F-\lambda^2$$

delle quali la seconda rappresenta la tangente alla curva, mentre la prima è il diametro che passa per il punto di contatto. L'equazione trasformata essendo: $A'Y^2+E'X=0$, indicato con Θ l' angolo dei nuovi assi a determinare A' ed E', si hanno le relazioni,

$$\frac{A'}{sen^2\Theta}=\frac{\delta}{sen^2\theta}\,,\ \frac{A'E'^2}{sen^2\Theta}=\frac{\Delta}{sen^2\theta}$$

per le quali essa diviene

$$\delta\,.\frac{sen^2\Theta}{sen^2\theta}\ Y^2+\sqrt{\frac{\Delta}{\delta}}\,.X=0.$$

ovvero essendo $\delta>0$,

$$(3)\qquad Y^2+\frac{sen^2\theta}{sen^2\Theta}\sqrt{\frac{\Delta}{\delta^3}}\,.\,X=0\,,$$

in cui il segno $\sqrt{}$ deve essere sempre affetto del segno $+$.

Corollario I. Dalle equazioni (2) si trae per *tang* Θ la espressione

$$(4)\qquad tang\,\Theta=\frac{(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})\,sen\,\theta}{\left[(D\sqrt{A}+E\sqrt{C})-(D\sqrt{C}+E\sqrt{A})\,cos\,\theta\right]-2\delta\,\lambda}\;;$$

e inversamente per la indeterminata λ, la

$$(5)\quad \lambda=\frac{1}{2\delta sen\Theta\,.}\left[\sqrt{A}\left(D\,sen\,\Theta-E\,sen(\Theta-\theta)\right)+\sqrt{C}\left(E\,sen\,\Theta-D\,sen\,(\Theta+\theta)\right)\right].$$

Corollario II. Il coefficiente della X nella equazione (3) nominasi *parametro* della parabola corrispondente al diametro $Y=0$. Questo designato con p_1, ha per valore

$$(6)\qquad p_1\,sen^2\Theta=\sqrt{\frac{\Delta:sen^2\theta}{(\delta:sen^2\theta)^3}}\,,$$

in cui la quantità che compone il secondo membro è indipendente da θ e da Θ.

Laonde si può stabilire il seguente Teorema. *Nella parabola il parametro relativo ad un diametro qualunque moltiplicato per il quadrato del seno dell'angolo che forma colle sue ordinate è costante.*

Corollario III. *Nominasi* vertice *della parabola il punto in cui questa è intersecata dall' asse.* Premesso ciò, si determini l'equazinne della parabola data dalla (1) riferendola all' asse ed alla tangente al vertice.

Essendo la tangente parallela alle ordinate del diametro che passa per il suo punto di tangenza si ha in questo caso $\Theta=90^0$; ed in conseguenza

(7) $$\lambda=\frac{1}{2\delta}\left[\sqrt{A}(D-E\cos\theta)+\sqrt{C}(E-D\cos\theta)\right]$$

(8) $$Y^2+sen^2\theta\sqrt{\frac{\Delta}{\delta^3}}.X=0.$$

Inoltre se il primitivo sistema di assi è ortogonale $\theta=90^0$, le precedenti equazioni si rendono più semplici divenendo,

(9) $$\lambda=\frac{D\sqrt{A}+\sqrt{C}}{2(A+C)}.$$

(10) $Y^2+\sqrt{\frac{\Delta}{\delta}}.X=0$, in cui la quantità $p=\sqrt{\frac{\Delta}{\delta^3}}$

è nominata il *parametro principale* della *parabola*.

Corollario IV. Nel caso in cui $\theta=\Theta=90^0$, si può pervenire alla trasformata (10), 1.° passando da un sistema di assi ortogonali ad altro pure ortogonale mediante le formule di trasformazione e determinando α in guisa che nella trasformata siano eliminati i termini in X^2 ed XY; 2.° trasportando gli assi parallelamente a se stessi e determinando le a, e b così da annullare nell'ottenuta equazione il termine in Y e quello indipendente dalle variabili.

54. *La retta che è perpendicolare alla tangente condotta ad una curva nel punto di tangenza nominasi* normale.

Problema. *Essendo* $F(x,y)=0$ *l'equazione generale delle linee di secondo ordine, designato con* θ *l'angolo degli assi, determinare l'equazione della normale condotta nel punto* $(x_0.y_0)$ *situato sopra di essa.*

Siccome la tangente nel punto (y_0,x_0) è rappresentata dalla equazione $(y-y_0).F'_{y_0}+(x-x_0).F'_{x_0}=0$, e la secante qualunque

condotta dal medesimo punto da $(y-y_0)\lambda+(x-x_0)\mu=0$, la condizione affinchè queste due rette siano scambievolmente perpendicolari data dalla espressione

$$\lambda(F'_{y_0}-F'_{x_0}\cos\theta)+\mu(F'_{x_0}-F'_{y_0}\cos\theta)=0,$$

conduce immediatamente all'equazione della normale:

$$(1)\qquad (y-y_0)(F'_{x_0}-F'_{y_0}\cos\theta)-(x-x_0)(F'_{y_0}-F'_{x_0}\cos\theta)=0.$$

Se gli assi primitivi sono ortogonali, $\theta=90^\circ$, questa si riduce

$$(2)\qquad (y-y_0)F'_{x_0}-(x-x_0)F'_{y_0}=0.$$

Asymptoti.

55. *Una secante, i cui punti d'intersezione con una linea di secondo ordine,* a_1 *ed* a_2, *sono ad una distanza maggiore di qualunque quantità assegnabile da un punto arbitrariamente preso su della secante medesima, nominasi* asymptoto *della linea.*

Problema I. *Data l'equazione generale delle linee di secondo ordine determinare quella dei loro asymptoti.*

Trasportando l'origine del primitivo sistema nel punto (x_0, y_0) arbitrariamente preso nel piano, per una secante da questo condotta e per la curva abbiamo le equazioni

$$X=m\rho,\ Y=n\rho;\ F(X+x_0, Y+y_0)=0:$$

e quindi i raggi vettori dei punti in cui esse si tagliano sono definiti dalla

$$\rho^2(An^2+Bmn+Cm^2)+\rho(nF'_{y_0}+mF'_{x_0})+F(x_0, y_0)=0.$$

Però i valori di ρ dovendo essere infiniti affinchè la secante sia asymptoto della curva, è necessario e sufficiente che sussistano le

condizioni:

$$An^2+Bmn+Cm^2=0\,,\ nF'_{y_0}+mF'_{x_0}=0$$

della quale la seconda, per essere il rapporto $\frac{n}{m}$ determinato dall'altra, si scinde nelle due $F'_{y_0}=0$, $F'_{x_0}=0$.

Ed indicando per semplicità con N ed N_1 le quantità $2AE-BD$; $BE-2CD$, l'equazione degli asymptoti ottenuta eliminando da tali condizioni m, n, x_0, y_0 è:

$$A(My-N_1)^2+B(My-N_1)\ (Mx+N)+C(Mx+N)^2=0$$

ovvero

$$2A(My-N_1)-(-B\pm\sqrt{-M})\ (Mx+N)=0\,,$$

e più semplicemente

$$(1)\qquad \sqrt{-M}\times F'_y\mp(Mx+N)=0\,,$$

la quale evidentemente ha luogo solo per $M<0$. Laonde ne deriva il seguente

Teorema. *Delle curve di secondo ordine la sola iperbola ammette due asymptoti che si tagliano nel centro della curva.*

Corollario I. Designando con ω l'angolo compreso fra gli asymptoti per esso abbiamo

$$(2)\qquad tang\ \omega=\frac{sen\ \theta\sqrt{-M}}{\delta}:\ \text{e se } \delta=0,\ \omega=90^\circ,$$

donde il Teorema: *Nell'Iperbola equilatera gli asymptoti si tagliano ad angolo retto.* Inoltre se rimanendo invariate le espressioni Δ, δ, si assume positiva M, ritenendo però lo stesso valore assoluto, il che equivale a considerare una ellisse, n.° 51*, costruita sui medesimi assi della iperbola, l'angolo degli asymptoti di questa egua-

glia l'angolo minimo ψ compreso fra i due diametri conjugati eguali appartenenti all'altra (n.° 50*).

Problema II.* *Sia* $Ay^2+Bxy+Cx^2=\frac{\Delta}{M}$ *l'equazione di una iperbola riferita ad assi coordinati che comprendono l'angolo* θ, *trasformarla in altra riferita agli asymptoti.*

Dovendo in questo caso l'equazione della curva ridursi alla $hXY+k^2=0$, per le relazioni del n. 45*, si hanno le

$$\frac{-h^2}{sen^2\omega}=\frac{M}{sen^2\theta},\ \frac{h^2k^2}{sen^2\omega}=\frac{\Delta}{sen^2\theta},\ \frac{-h\cos\omega}{sen^2\omega}=\frac{\delta}{sen^2\theta};$$

e quindi

$$(3)\qquad XY=\frac{\Delta R_1}{M^2}=\frac{a^2+b^2}{4}=k_1^2,\ (n.^{\circ}\ 51^*).$$

Corollario I.* Posto in (X_0Y_0) l'origine di un nuovo sistema di assi paralleli agli asymptoti l'equazione della curva e di una secante qualunque sono:

$$(X+X_0)\,(Y+Y_0)=k_1^2,\ X=m\rho,\ Y=n\rho.$$

Pertanto i raggi vettori dei punti in cui la interseca sono dati dalla:

$$\rho^2\,.\,mn+\rho(mY_0+nX_0)+X_0Y_0-k_1^2=0,$$

ovvero da

$$\rho=-\frac{1}{2}\left(\frac{Y_0}{n}+\frac{X_0}{m}\right)\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{Y_0}{n}-\frac{X_0}{m}\right)^2+\frac{4k_1^2}{mn}};$$

mentre quelli in cui taglia gli asymptoti da

$$\delta_1=-\frac{Y_0}{n},\ \delta_2=-\frac{X_0}{m},$$

cosicchè la differenza dei raggi vettori relativi ad uno degli asymptoti e ad uno dei rami della curva essendo espressa da

$$\rho_1 - \delta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{Y_0}{n} - \frac{X_0}{m}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{Y_0}{n} - \frac{X_0}{m}\right)^2 + \frac{4k_1^2}{mn}},$$

eguaglia in valore assoluto quella sussistente fra i raggi vettori relativi all'altro asymptoto ed al secondo ramo di curva,

$$\rho_2 - \delta_2 = -\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{Y_0}{n} - \frac{X_0}{m}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{Y_0}{n} - \frac{X_0}{m}\right)^2 + \frac{4k_1^2}{mn}}\right\},$$

qualunque siano m, n ed Y_0, X_0. Ed in pari modo si ha

$$\rho_1 - \delta_2 = -(\rho_2 - \delta_1), \text{ ed } (\rho_1 - \delta_1)(\delta_1 - \rho_2) = (\rho_1 - \delta_2)(\delta_2 - \rho_2) = \frac{K_1^2}{mn} = b_1^2,$$

nominando $-b_1^2$ il semi-diametro parallelo alla secante. Esso è la lunghezza compresa fra il centro della linea $XY = k_1^2$. ed il punto ove è intersecata dalla retta $Y = \frac{n}{m}X$.

Da ciò deriva il Teorema. *Se una secante qualunque taglia in due punti la iperbola i segmenti compresi fra la curva e gli asymptoti sono eguali ed il rettangolo costruito su due di tali segmenti relativi al medesimo asymptoto è costante per secanti parallele, ed eguaglia il quadrato del semi-diametro conjugato a quello ad esse relativo.*

Se la secante $Y = n\rho$, $X = m\rho$ diviene tangente, $\rho_1 = \rho_2$, il segmento compreso fra i punti ove essa taglia gli asymptoti eguaglia $2b$, ed è bisecato nel punto di tangenza, congiungendo poi questo col centro della curva si ottiene evidentemente (n.° 52) il semi-diametro a' al precedente b' conjugato.

Per la condizione che in questo caso ha luogo,

$$\left(\frac{Y_0}{n} - \frac{X_0}{m}\right)^2 + 4\frac{k_1^2}{mn} = 0,$$

esistendo due punti $(X_0 Y_0)$, $(-Y_0, -X_0)$ diametralmente opposti che vi soddisfano le tangenti condotte alle due estremità di un medesimo diametro a' sono parallele. Laonde si ottiene il Teorema: *Gli asymptoti coincidono colle diagonali del parallelogrammo costruito su due diametri conjùgati qualunque.*

Polare.

56.* Teorema I. *Sia* $F(x, y)=0$ *l'equazione generale di una linea di secondo ordine, se sopra ogni raggio vettore condotto da un punto fisso* $P(x_0, y_0)$ *si determina un punto* R *per cui, denotando con* R_1, R_2 *le intersezioni di* PR *colla curva, è soddisfatta la relazione*

$$(1) \qquad \frac{2}{PR}=\frac{1}{PR_1}+\frac{1}{PR_2}$$

il luogo geometrico dei punti R *è una retta.*

Siano xy le coordinate di R; il punto R_1 che divide PR nel rapporto qualunque $\frac{RR_1}{PR_1}=\mu$ è determinato da $\frac{x+\mu x_0}{1+\mu}$, $\frac{y+\mu y_0}{1+\mu}$. Ma, dovendo R_1 giacere sulla curva, per determinare μ, si ha l'equazione:

$$F\left(\frac{x+\mu x_0}{1+\mu}, \frac{y+\mu y_0}{1+\mu}\right)=\frac{1}{(1+\mu)^2}\Big[F(x,y)+\mu\Big(yF'_{y_0}+xF'_{x_0}+Dy_0+Ex_0+2F\Big)+\mu^2F(x_0, y_0)\Big]=0,$$

le cui radici corrispondono ai due punti R_1, R_2. Però la (1) trasformandosi nella

$$2=\frac{PR}{PR_1}+\frac{PR}{PR_2}=\frac{PR_1+R_1R}{PR_1}+\frac{PR_2+R_2R}{PR_2}=2+\frac{R_1R}{PR_1}+\frac{R_2R}{PR_2}$$

ovvero nella
$$\frac{RR_1}{PR_1}+\frac{RR_2}{PR_2}=0,$$

è evidente come il luogo geometrico di R sia definito dalla equazione:

$$(2) \qquad yF'_{y_0}+xF'_{x_0}+(Dy_0+Ex_0+2F)=0,$$

la quale essendo di primo grado in x ed y rappresenta una retta. Questa si nomina *polare* del punto P relativamente alla linea di secondo ordine e P dicesi suo *polo*.

Corollario. *Se sulla polare di* $P(x_0, y_0)$ *si prende un punto qualunque* $M(x_1, y_1)$ *la polare di questo deve passare per il punto* P *polo della prima.* Infatti la (2) ordinata per $x_0\, y_0$, per $x=x_1$, $y=y_1$, diviene:

$$y_0F'_{y_1}+x_0F'_{x_1}+(Dy_1+Ex_1+2F)=0,$$

la quale esprime la condizione per cui il punto $P(x_0, y_0)$ giace sulla polare di M.

Problema. *Data una retta* $ly+mx+n=0$ *determinare le coordinate del suo polo relativamente ad una linea di secondo ordine espressa dalla equazione generale* $F(x, y)=0$.

Indicando con $x_0 y_0$ le coordinate del polo, l'equazione della retta data dovendo identificarsi colla (2), da le condizioni:

$$y^0(Bl-2Am)+x_0(2Cl-Bm)+(El-Dm)=0,$$

$$y_0(Dl-2Am)+x_0(El-Bm)+(2Fl-Dm)=0.$$

Dalle quali eliminando si ottengono per x_0, y_0 i valori

$$(3) \quad \begin{cases} x_0=\begin{vmatrix} Bl-2Am, & Dm-El \\ Dl-2Am, & Dm-2Fl \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} Bl-2Am, & 2Cl-Bm \\ Dl-2Am, & El-Bm \end{vmatrix} \\ \\ y_0=\begin{vmatrix} Dm-El, & 2Cl-Bm \\ Dm-2Fl, & El-Bm \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} Bl-2Am, & 2Cl-Bm \\ Dl-2Am, & El-Bm \end{vmatrix}. \end{cases}$$

TEOREMA II. *Le polari dei vari punti di una retta $ly+mx+n=0$ sono rette che passano tutte per un medesimo punto che è il suo polo.*

Sia x_0y_0 un punto qualunque della retta data: eliminando x_0 fra l'equazione della polare di questo (2) e la $ly_0+mx_0+n=0$, avremo:

$$y_0\left[mF'_y-lF'_x\right]+\left[m\,(Dy+Ex+2F)-nF'_x\right]=0,$$

equazione che rappresenta una retta la cui posizione dipende da quella del punto x_0y_0 e che passa sempre per la intersezione delle rette:

$$mF'_y-lF'_x=0,\ m(Dy+Ex+2F)-nF'_x=0.$$

Da queste si deducono di nuovo per x, y polo della retta data i valori (3).

COROLLARIO. Date due rette R ed S la polare del loro punto di intersezione deve necessariamente passare per i poli r ed s di ambedue le rette; ed inversamente la retta che congiunge due punti dati r ed s è la polare del punto d'intersezione delle loro polari R,S.

TEOREMA III. *Da un dato punto* P *tirate le due trasversali* PR, PS, *siano* a_1a_2, b_1b_2 *i punti in cui ciascuna di esse taglia una linea di secondo ordine, si congiungano questi due a due direttamente mediante le rette* a_1b_1, a_2b_2, *trasversalmente per le* a_1b_2, a_2b_1: *allora se* c_1 *è il punto d'intersezione delle prime, e* c_2 *quello delle altre, la retta* c_1c_2 *è la polare di* P.

Infatti l'equazione della linea di secondo ordine riferita alle rette PR, PS prese per assi coordinati delle x e delle y sia $Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$; i segmenti Pa_1, Pa_2; Pb_1, Pb_2 che questa determina sovra di essi rappresentati con a, a'; b, b' sono le radici delle equazioni $Cx^2+Ex+F=0$, $Ay^2+Dy+F=0$.

Laonde abbiamo

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=-\frac{E}{F},\quad \frac{1}{b}+\frac{1}{b'}=-\frac{D}{F}.$$

Ma le equazioni

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0,\quad \frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}-1=0$$

esprimono le rette a_1b_1, a_2b_2 e le

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b'}-1=0,\quad \frac{x}{a'}+\frac{y}{b}-1=0$$

le a_1b_2, a_2b_1; e per conseguenza

$$x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)+y\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)-2=Dy+Ex+2F=0$$

la retta c_1c_2 la quale coincide colla polare di P origine delle coordinate.

Corollario. Se le trasversali PR, PS divengono tangenti alla linea di secondo ordine, i punti c_1, c_2 si confondono con i loro punti di tangenza; di guisa che *la polare di un punto* P *si confonde colla retta che congiunge i punti di tangenza (reali od immaginari) delle due tangenti (reali od immaginarie) condotte da* P. Questo Teorema somministra il mezzo di costruire colla sola riga la polare di un punto P relativamente ad una curva di secondo ordine già descritta: e quindi di tracciare le due tangenti che passano per P allorchè questo giace esternamente alla curva.

Teorema IV. *Se per il punto* P *si conduce la trasversale qualunque* PR *che tagli una linea di secondo ordine in* R_1 *ed* R_2 *le tangenti a questa in* R_1 *ed* R_2 *si intersecano sulla polare di* P.

Infatti se (Teorema III.) ambedue i punti a_1 a_2 coincidono con R_1 e b_1 b_2 con R_2 la polare di P passa pel punto c_1 intersezione delle due tangenti.

57.* Dalla relazione che definisce la polare di P,

$$\frac{2}{PR}=\frac{1}{PR_1}+\frac{1}{PR_2}\ \text{si trae}\ \frac{PR_2}{PR_1}=1-\frac{R_1R_2}{RR_1},$$

la quale per R all' infinito od $RR_1=\infty$ diviene $PR_1=PR_2$ e perciò il punto P biseca una corda qualunque condotta per esso. Dunque *il centro di una linea di secondo ordine può considerarsi come il polo di una retta all' infinito;* e le sue coordinate si ottengono dalle espressioni (3) in cui $l=m=0$.

Se il punto P è all' infinito, $PR=\infty$, avendo $\frac{1}{RR_1}+\frac{1}{RR_2}=0$, la polare ad esso corrispondente divide tutte le corde R_1R_2 che passano per P e perciò sono parallele in due segmenti eguali ed opposti in direzione. Laonde *ogni diametro di una linea di secondo ordine può riguardarsi come la polare del punto all' infinito a cui convergono le corde parallele che esso biseca.* Essendo $ly+mx+n=0$ l' equazione delle corde, $l'y+m'x+n'=0$ quella di una retta che si considera all'infinito per $l'=m'=0$, dalla equazione generale della polare (2) posto $x_0=(nl'):(lm')$, $y_0=(mn'):(lm')$ ed $l'=m'=0$, si deduce immediatamente quella del diametro.

Se il punto P è sulla curva e coincide con R_1, avendo $\frac{2}{R_1R}=\frac{1}{RR_1}+\frac{1}{RR_2}$ ed $RR_1=RR_2$, deve R_1 coincidere con R_2; per conseguenza *la tangente ad una linea di secondo ordine può considerarsi come la polare del suo punto di tangenza.* La sua equazione immediatamente si trae da quella della polare ponendovi $F(x_0,y_0)=0$.

Trasversali

58.* Teorema. *Se per un punto qualunque* $P(x_0,y_0)$ *si conducono due corde* PR, PS *che seghino la linea di secondo ordine espressa dalla equazione generale* $F(x,y)=0$ *rispettivamente nei punti* R_1,

R_2; S_1, S_2, *il rapporto dei rettangoli* $PR_1 \,.\, PR_2 : PS_1 \,.\, PS_2$ *è costante, qualunque sia la posizione di* P, *purchè le direzioni delle trasversali rimangano invariate.*

Trasportando in P l'origine di un sistema di assi paralleli ai primitivi, l'equazioni della linea di secondo ordine e delle PR, e PS sono: $AY^2+BXY+CX^2+D'Y+E'X+F'=0$, $Y=n\rho$, $X=m\rho$ per PR, $Y=n'\rho$, $X=m'\rho$ per PS; e quindi immediatamente si ottengono le relazioni

$$PR_1 \times PR_2 = \frac{F'}{An^2+Bmn+Cm^2}, \quad PS_1 \times PS_2 = \frac{F'}{An'^2+Bm'n'+Cm'^2}$$

da cui

$$\frac{PR_1 \times PR_2}{PS_1 \times PS_2} = \frac{An'^2+Bm'n'+Cm'^2}{An^2+Bmn+Cm^2},$$

la quale non contenendo $x_0\, y_0$ rimane invariata qualunque sia la posizione di P, purchè però m, n, m' n', quantità da cui dipendono le direzioni delle trasversali rimangano costanti.

Corollario I. In simile modo si dimostra il Teorema. *Se per due punti fissi* P, P_1 *si conducono due parallele qualunque* PR, P_1r, *il rapporto dei rettangoli costruiti sui segmenti che su ciascuna di queste determina la linea di secondo ordine è costante, qualunque sia la direzione di tali trasversali.*

Infatti essendo (x_0, y_0) le coordinate di P, ed (x_1, y_1) quelle di P_1, evidentemente si hanno

$$PR_1 \times PR_2 = \frac{F(x_0, y_0)}{An^2+Bmn+Cm^2}, \quad P_1r_1 \times P_1r_2 = \frac{F(x_1, y_1)}{An^2+Bmn+Cm^2}$$

da cui

$$\frac{PR_1 \times PR_2}{P_1r_1 \times P_1r_2} = \frac{F(x_0, y_0)}{F(x_1, y_1)}$$

quantità indipendente dal rapporto $n:m$ o dalla direzione delle trasversali.

Corollario II. Se P_1 coincide col centro della curva, avendo $P_1r_1=P_1r_2$, la quantità $P_1r_1 \times P_1r_2$ eguaglia il quadrato del semidiametro parallelo a PR. Laonde il Teorema: *I rettangoli costruiti sui segmenti di due corde che s' intersecano sono proporzionali ai quadrati dei diametri ad esse paralleli.*

Corollario III. Sia PR tangente alla curva, e perciò $PR_1=PR_2$, la quantità $PR_1 \times PR_2$ coincide col quadrato della tangente, lunghezza compresa fra P ed il punto di tangenza R; e siccome da P possono condursi due tangenti, estraendo le radici dai rapporti eguali, si deduce che *due tangenti condotte da un punto qualunque sono proporzionali ai diametri a cui sono respettivamente parallele.*

Corollario IV. Sia PP_1 un diametro, ed A, A_1 i punti in cui taglia la curva, PR, P_1r siano trasversali parallele alle sue ordinate, avendo $PR_1=PR_2$, $P_1r_1=P_1r_2$, sarà $\frac{PR_1^2}{AP \, . \, PA_1}=\frac{P_1r_1^2}{AP_1 \, . \, P_1A_1}$ ed in conseguenza: *i quadrati delle ordinate di un diametro qualunque sono proporzionali ai rettangoli costruiti sui segmenti che esse determinano sul diametro.*

Fuochi.

59.* Problema *Essendo*

$$(1) \qquad F(x,y)=Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

l' equazione generale di una linea di secondo ordine, per un punto dato (x_1, y_1) condotte le trasversali qualunque

$$(2) \qquad (y-y_1)+\sigma_1(x-x_1)=0, \quad (y-y_1)+\sigma_2(x-x_1)=0$$

determinare la relazione fra σ_1 e σ_2 necessaria e sufficiente affinchè il polo di una di esse giaccia sull' altra ed inversamente.

Avendo, n.° 56,

$$(3) \begin{cases} y_0(B-2A\sigma_2)+x_0(2C-B\,.\,\sigma_1)+(E-D\sigma_1)=0 \\ y_0(D+2Ay_1+2Ax_1.\sigma_1)+x_0(E+By_1+Bx_1.\sigma_1)+(2F+Dy_1+Dx_1\sigma_1)=0 \end{cases}$$

per il polo $(x_0 y_0)$ della prima trasversale, e le (3')

$$y_0'(B-2A\sigma_2)+x_0'(2C-B\sigma_2)+(E-D\sigma_2)=0$$
$$y_0'(D+2Ay_1+2Ax_1\sigma_2)+x_0'(E+By_1+Bx_1.\sigma_2)+(2F+Dy_1+Dx_1\sigma_2)=0$$

per quello $(x_0' y_0')$ dell' altra, le condizioni a cui le arbitrarie σ_1 e σ_2 devono soddisfare si ottengono, eliminando x_0 e y_0 fra l'equazioni (3) e la $(y_0-y_1)+\sigma_2(x_0-x_1)=0$ e parimente eliminando x_0' e y_0' fra le (3') e la $(y_0'-y_1)+\sigma_1(x_0'-x_1)=0$. Pertanto i valori di x_0, y_0 ricavati dalle (3) adoperando le notazioni del n.° 34 sono

$$y_0=\frac{P_{1\cdot1}-P_{1\cdot3}(y_1+\sigma_1 x_1)+P_{1\cdot2}\sigma_1}{P_{3\cdot1}-P_{3\cdot3}(y_1+\sigma_1 x_1)+P_{3\cdot2}\sigma_1},\quad x_0=\frac{P_{2\cdot1}-P_{2\cdot3}(y_1+\sigma_1 x_1)+P_{2\cdot2}\sigma_1}{P_{3\cdot1}-P_{3\cdot3}(y_1+\sigma_1 x_1)+P_{3\cdot2}\sigma_1};$$

per conseguenza una di tali condizioni è

$$(4)\quad \begin{vmatrix}1, & P_{3\cdot3} & P_{1\cdot2}\\ 0, & 1, & y_1\\ y_1, & P_{3\cdot1}, & P_{1\cdot1}\end{vmatrix}+(\sigma_1+\sigma_2)\cdot\begin{vmatrix}1, & P_{3\cdot2}, & P_{1\cdot2}\\ 0, & 1, & x_1\\ y_1, & P_{1\cdot3}, & P_{2\cdot1}\end{vmatrix}+\sigma_1\sigma_2\cdot\begin{vmatrix}1, & P_{3\cdot3}, & P_{2\cdot3}\\ 0, & 1, & x_1\\ x_1, & P_{2\cdot3} & P_{2\cdot2}\end{vmatrix}=0;$$

e questa essendo simmetrica relativamente a σ_1, σ_2 coincide coll'altra, le due condizioni riducendosi in una sola.

60.* *Quel punto da cui condotte due trasversali qualunque ad angolo retto, il polo dell' una relativamente alla curva* (1), *giace sull' altra ed inversamente nominasi* fuoco *di tale curva.*

Problema. *Determinare le coordinate dei fuochi appartenenti alla linea di secondo ordine* $F(x, y)=0$, *essendo* θ *l' angolo compreso dagli assi coordinati.*

La condizione affinchè le trasversali (3) n.° 59.* siano scambievolmente ortogonali, essendo

$$1+(\sigma_1+\sigma_2)\cos\theta+\sigma_1\sigma_2=0,$$

l'equazione risultante in σ_1 ottenuta eliminando σ_2 fra questa e

la (4) dovendo essere verificata qualunque σ_1, si scinde nelle due equazioni:

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} 1, & P_{3\cdot3}, & P_{1\cdot3} \\ 0, & 1, & y_1 \\ y_1, & P_{3\cdot1}, & P_{1\cdot1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & P_{3\cdot3}, & P_{2\cdot3} \\ 0, & 1 & , x_1 \\ x_1, & P_{3\cdot2}, & P_{2\cdot2} \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} 1, & P_{3\cdot3}, & P_{2\cdot3} \\ 0, & 1 & , x_1 \\ y_1, & P_{1\cdot3}, & P_{2\cdot1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & P_{3\cdot3}, & P_{1\cdot3} \\ 0, & 1 & , y_1 \\ y_1, & P_{3\cdot1}, & P_{1\cdot1} \end{vmatrix} \cos\theta$$

per cui si possono determinare x_1 e y_1.

Sviluppando esse sono

$$\begin{cases} P_{3\cdot3}(y_1^2-x_1^2)-2P_{3\cdot1}y_1+2P_{2\cdot3}x_1+(P_{1\cdot1}-P_{2\cdot2})=0 \\ P_{3\cdot3}(x_1y_1-y_1^2\cos\theta)-y_1(P_{2\cdot3}-2P_{3\cdot1}\cos\theta)-P_{3\cdot1}x_1+(P_{2\cdot1}-P_{1\cdot1}\cos\theta)=0 \end{cases}$$

e rappresentano due iperbole, le quali sono ambedue concentriche colla data linea di secondo ordine.

Se $\theta=90^\circ$, esse divengono

$$(2)\qquad \begin{cases} P_{3\cdot3}(y_1^2-x_1^2)-2P_{3\cdot1}y_1+2P_{2\cdot3}x_1+(P_{1\cdot1}-P_{2\cdot2})=0 \\ P_{3\cdot3}\,x_1y_1 \quad - P_{2\cdot3}y_1 - P_{3\cdot1}x_1 + P_{2\cdot1} \qquad =0, \end{cases}$$

che esprimono le due iperbole delle quali la prima è equilatera.

Corollario I. Sia $P_{3\cdot3}>0$, trasportando il sistema di assi coordinati parallelamente a se stessi al centro della curva, l'equazioni (1) n.° 59.*, e (2) si riducono nelle

$$Ay^2+Bxy+Cx^2=\frac{\Delta}{M}; \quad x_1^2-y_1^2=\frac{4\Delta(A-C)}{M^2}; \quad x_1y_1=\frac{2\Delta B}{M^2}$$

Da queste si deducono per x_1 ed y_1 le coppie di valori

$$(3)\qquad x_1=\pm\frac{\sqrt{2\Delta}}{M}\cdot\sqrt{(A-C)\pm\sqrt{(A-C)^2+B^2}},$$

$$y_1=\pm\frac{\sqrt{-2\Delta}}{M}\cdot\sqrt{(A-C)\mp\sqrt{(A-C)^2+B^2}}$$

di cui due sono sempre reali e le altre due sempre immaginariè. Inoltre i punti che ad esse corrispondono determinano le rette

$$By+\left[R-(A-C)\right]x=0, \quad By-\left[R+(A-C)\right]x=0$$

che coincidono cogli assi della curva. Laonde può enunciarsi il

Teorema. *Le linee di secondo ordine dotate di centro hanno sempre due fuochi che giacciono sopra uno degli assi della curva.*

Corollario II. Sia $P_{3,3}=0$, trasportando il sistema delle coordinate al vertice della curva, e prendendo per uno dei nuovi assi, l' asse stesso della medesima, l'equazioni (1) n.° 59.* e (2) si trasformano nelle

$$Y^2+\sqrt{\frac{\Delta}{\delta^3}}.X=0; \quad 4\times\sqrt{\frac{\Delta}{\delta^3}}x_1-\frac{\Delta}{\delta^3}=0; \quad -2\times\sqrt{\frac{\Delta}{\delta^3}}.y_1=0.$$

Da queste si hanno i valori

$$y_1=0, \quad x_1=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\Delta}{\delta^3}}$$

che convengono ad un unico punto situato sull' asse delle x. Donde si può stabilire il

Teorema. *La parabola ha un solo fuoco posto sopra l'asse; e condotta per quello normalmente a questo una corda, la sua lunghezza eguaglia il parametro principale della curva.*

Corollario III. Per la ellisse e per la iperbola riferite agli assi e al centro, e date per $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$, le coordinate dei fuochi sono: per la ellisse,

$$x_1=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2-b^2)(1\pm1)}, \quad y_1=\pm\frac{1}{2}\sqrt{-2(a^2-b^2)(1\mp1)}$$

e per la iperbola

$$x_1=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)(1\pm1)}, \quad y_1=\pm\frac{1}{2}\sqrt{-2(a^2+b^2)(1\mp1)}.$$

Quindi nella prima i due fuochi sono situati sull'asse maggiore, e nella altra sull' asse trasverso.

Corollario IV. Congiungendo un punto qualunque della curva (ellisse o iperbola) con ciascuno dei fuochi i raggi vettori che ne resultano nominati ρ_1, ρ_2 hanno per valore

$$\rho_1 = \frac{a^2 - cx}{a} = a - ex, \quad \rho_2 = a + ex,$$

ricordando essere

$$c^2 = a^2 \pm b^2, \quad \frac{c}{a} = e,$$

il segno — riferendosi alla ellisse, il segno + alla iperbola. Laonde *il fuoco è punto tale che congiunto con un punto qualunque della curva, la espressione di ogni raggio vettore è razionale.*

Esercizii.

I. Trasformare le equazioni

$$7y^2 + 5xy + x^2 + 3y - 6x - 3 = 0, \quad 2y^2 - 4xy + 5x^2 + 8y + 10x - 7 = 0$$

al centro (assi coordinati qualunque).

II. Determinare le equazioni dei diametri corrispondenti ai sistemi di corde

$$2y - 3x + 1 = 0, \quad x - 2y + 5x = 0, \quad 2x - 3y - 3 = 0$$

per le linee di secondo ordine date dalle equazioni

$$3y^2 + 4xy + 2x^2 + y - 2x - 12 = 0, \quad 4y^2 + xy - 2x^2 + 7x - 8 = 0,$$
$$2y^2 + 4xy + 2x^2 - y + 3x + 1 = 0,$$

(assi coordinati qualunque).

III. Determinare le equazioni degli assi per le linee di secondo ordine

$$y^2-2xy+2x^2-4y+x-1=0\ ,\ y^2-2xy-x^2-2y+2x+3=0,$$
$$y^2-2xy+x^2-7x-3=0,$$

(assi coordinati ortogonali).

IV. Avendo le linee di secondo ordine definite dalle equazioni

$$2y^2-xy+x^2=12,\ 3y^2+2xy-5x^2=25$$

determinare le equazioni dei diametri respettivamente conjugati a quelli dati dalle

$$y+3x=0,\ 2y-7x=0,\ 4y+5x=0$$

(assi coordinati ortogonali).

V Avendo la linea

$$x^2-3xy+y^2+12=0,$$

riferita ad un sistema di coordinate il cui angolo sia di 60° trasformare la sua equazione prendendo per assi coordinati i suoi assi.

VI. Da un punto dato $P(x_0, y_0)$ condurre due trasversali parallele ad un sistema di diametri conjugati appartenenti alla linea di secondo ordine

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$

(il sistema di assi coordinati essendo qualunque).

VII. Unito un punto qualunque M di una linea di secondo ordine alle estremità di un diametro qualunque AA_1, dimostrare che le tre corde AM, A_1M (*corde supplementarie*) sono parallele ad un sistema di diametri conjugati.

VIII. Dato un arco di ellisse o di iperbola determinare il suo centro.

IX. Data una ellisse, determinare i suoi assi od un sistema di diametri conjugati che comprenda un angolo dato.

X. Determinare in grandezza e direzione gli assi delle curve di secondo ordine le quali riferite ad assi ortogonali sono date dall' equazioni

$$y^2-2xy+3x^2-2y-6x+7=0,\ 4y^2-4xy+2x^2-8y-2x+9=0$$
$$4y^2-4xy-7x^2-8y+20x+28=0,\ 4y^2-8xy+2x^2-4y+8x-3=0$$
$$4x^2-8xy+3x^2-4y+6x-4=0,\quad 2y^2-3xy-2x^2+y+x-1=0$$

XI.* Determinare il sistema di diametri conjugati eguali delle ellissi rappresentate dalle equazioni

$$y^2-4xy+6x^2-2y+2x-1=0,\quad 2y^2-3xy+2x^2+y-1=0$$

(assi ortogonali)

$$3x^2+4xy+5y^2-2x-7y-4=0,\ 14x^2-4xy+11y^2-60=0$$

(angolo degli assi $=60^0$).

XII.* Determinare il luogo geometrico di un punto da cui condotte le due tangenti ad una linea di secondo ordine espressa dalla sua equazione generale, queste si tagliano ad angolo retto.

XIII. Trasformare l' equazioni delle parabole, riferite ad assi ortogonali,

$$9y^2+24xy+16x^2+22y+46x+9=0,\ 4y^2-4xy+x^2-4y+x+2=0$$

al vertice ed all' asse.

XIV. Trasformare agli asymptoti le equazioni delle iperbole

$$3y^2-4xy-x^2-2y+x-1=0,\quad y^2+5xy-x^2+7y+x-4=0$$

(assi ortogonali)

$$2y^2+4xy+y^2+3y-x+4=0,\quad x^2-2xy-y^2-2x=0$$

(assi che comprendono un angolo di 60^0).

XV. Descrivere la iperbola conoscendo gli asymptoti ed un suo punto.

XVI. Determinare l'equazione di una linea di secondo ordine che taglia sugli assi coordinati segmenti dati.

XVII.* Dati quattro punti sovra una linea di secondo ordine, la polare di un punto qualunque passa per un punto fisso.

XVIII.* Trovare il luogo geometrico del centro di una linea di secondo ordine sottoposta a passare per quattro punti dati.

XIX. Trovare l'equazione di una linea di secondo ordine che passa per cinque punti dati.

XX. Trovare l'equazione di una linea di secondo ordine che è tangente ai due assi, passa per un punto dato ed in altro punto parimente dato ha il suo centro.

XXI. Unito un punto qualunque M di una parabola colla estremità A di un diametro AB, e condotta parallelamente a questo la retta A_1M, dimostrare che AM, A_1M sono parallele ad un diametro e alla tangente parallela alle sue ordinate.

XXII. Data una parabola, determinare il suo asse, il suo vertice, ed il suo parametro principale.



CAPITOLO VII.



MONOGRAFIA DELLE LINEE DI SECONDO ORDINE.

I. Circonferenza.

61. Problema I. *Determinare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la equazione generale*

$$(1)\qquad Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

rappresenti la circonferenza.

Designando con (α, β) le coordinate del centro, con r il raggio della circonferenza la sua equazione per assi obliqui, è

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2+2(y-\beta)(x-\alpha)\cos\theta=r^2.$$

E questa dovendo essere identica colla (1) dà le richieste condizioni, (n.° 50*)

$$(2)\qquad A=C,\quad B=2A\cos\theta.$$

Corollario I. Se $\theta=90^\circ$, esse divengono $A=C$, $B=0$. Quindi le quantità (α, β) da cui dipende la posizione della circonferenza relativamente agli assi, ed r da cui dipende la sua grandezza sono espresse dalle

$$(3)\qquad \alpha=-\frac{E}{2A},\quad \beta=-\frac{D}{2A},\quad r^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}.$$

E siccome le espressioni di α e β non contengono F, se ne deduce che *due circonferenze sono concentriche se le loro equazioni unicamente differiscono nel termine costante.*

Corollario II.* Se $D^2+E^2=4AF$, od $r=0$, l'equazione della circonferenza si riduce nella

$$(4) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=0.$$

È evidente come questa sia solo soddisfatta dalle coordinate del punto ($x=\alpha$, $y=\beta$), e per conseguenza rappresenti unicamente questo. Nulladimeno, ogni equazione esprimendo sempre una linea, per analogia diremo che la (4) conviene ad *una circonferenza infinitamente piccola* il cui centro è nel punto (α, β). Inoltre essa decomponendosi nei due fattori lineari immaginari

$$(x-\alpha)+(y-\beta)i=0\,, \quad (x-\alpha)-(y-\beta)i=0$$

può essere anche considerata come l'equazione di *due rette immaginarie* concorrenti nel punto $(\alpha\beta)$.

Problema II. *Determinare il rapporto in cui la retta che unisce i due punti* (x_1, y_1), (x_2, y_2) *è tagliata dalla circonferenza la cui equazione riferita al centro e ad assi coordinati ortogonali è*

$$(1) \qquad x^2+y^2=r^2.$$

Le coordinate di un punto qualunque posto sulla retta che unisce i punti dati, indicate con x_0 y_0, vengono espresse da

$$(2) \qquad x_0=\frac{x_2+\lambda x_1}{1+\lambda}\,, \qquad y_0=\frac{y_2+\lambda x_1}{1+\lambda}$$

in cui la quantità arbitraria è il rapporto $1:\lambda$ secondo il quale tal retta è secata dalla circonferenza. Perciò la incognita λ si determina per la condizione che le coordinate (2) soddisfino alla equazione (1) o che sia

$$(3) \quad \lambda^2(x_1^2+y_1^2-r^2)+2\lambda(x_1x_2+y_1y_2-r^2)+(y_2^2+x_2^2-r^2)=0.$$

Corollario I. *Determinare l'equazione delle tangenti condotte dal punto dato* $(x_1\, y_1)$ *alla circonferenza espressa dalla* (1).

Se si indicano con x y le coordinate di un punto qualunque della tangente, siccome la circonferenza è da essa secata in due punti coincidenti, è evidente che la (3), ove $x_2=x$, $y_2=y$, ammette radici eguali; quindi abbiamo

$$(4) \qquad (xx_1+yy_1-r^2)^2=(x_1^2+y_1^2-r^2)\,(y^2+x^2-r^2)$$

equazione richiesta. Queste due tangenti sono *reali* se $x_1^2+y_1^2>r^2$ o se il punto dato è esterno alla circonferenza; sono *immaginarie* se $x_1^2+y_1^2<r^2$, od il punto giace nella superficie piana chiusa dalla circonferenza; sono coincidenti, riducendosi nella unica

$$xx_1+yy_1-r^2=0$$

se $x_1^2+y_1^2=r^2$, o se il punto dato è posto sulla circonferenza.

Corollario II. I due punti di tangenza delle (4) sono evidentemente posti sulla retta (polare di x_1y_1)

$$(5) \qquad xx_1+yy_1-r^2=0$$

in quanto che le loro coordinate nel medesimo tempo soddisfano alle equazioni (1) (4) e per conseguenza alla (5). La polare è poi perpendicolare alla retta che unisce il centro della circonferenza col punto dato e determina sugli assi segmenti, ciascuno dei quali è una terza proporzionale fra il raggio e la coordinata corrispondente del punto dato. Inoltre le cordinate dei punti di tangenza giacciono sulla circonferenza data dalla

$$\left(y-\frac{y_1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{x_1}{2}\right)^2=\frac{x_1^2+y_1^2}{4},$$

rimanendo questa soddisfatta per le (1) (5): donde si deduce la costruzione descritta nella Geometria elementare.

62*. Problema I. *Determinare l' equazione della circonferenza circoscritta al triangolo formato dalle rette espresse dalle equazioni*

$$(1) \quad \alpha_1 = x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha - p = 0\,, \quad \alpha_2 = x\cos\beta + y\,\mathrm{sen}\,\beta - p_1 = 0\,, \quad \alpha_3 = x\cos\gamma + y\,\mathrm{sen}\,\gamma - p_3 = 0$$

riferite ad un sistema ortogonale di assi.

Qualunque equazione della forma $\alpha_2\alpha_3 + \lambda\alpha_1\alpha_3 + \mu\alpha_1\alpha_2 = 0$, ove λ e μ sono costanti arbitrarie, denota una linea di secondo ordine circoscritta al dato triangolo, poichè sussiste pei valori di x, y che soddisfano a ciascun sistema di equazioni; $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$; $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$; $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, i quali perciò convengono ai suoi vertici. Le condizioni necessarie affinchè essa rappresenti una circonferenza (n.° 50*) sono

$$\cos(\beta+\gamma) + \lambda\cos(\gamma+\alpha) + \mu\cos(\alpha+\beta) = 0,$$
$$\mathrm{sen}\,(\beta+\gamma) + \lambda\,\mathrm{sen}\,(\gamma+\alpha) + \mu\,\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta) = 0.$$

Eliminando fra queste successivamente λ e μ, si ottengono i valori

$$\lambda = \frac{\mathrm{sen}\,(\gamma-\alpha)}{\mathrm{sen}\,(\beta-\alpha)}\,; \quad \mu = \frac{\mathrm{sen}(\alpha-\beta)}{\mathrm{sen}(\beta-\alpha)}.$$

Designando con C, B, A gli angoli compresi fra i lati $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$; $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$; $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, essendo $\alpha-\beta$, $\gamma-\alpha$, $\beta-\gamma$ gli angoli che scambievolmente formano le perpendicolari condotte da un punto qualunque ad ogni coppia di lati, ed avendo

$$\mathrm{sen}\,C = \mathrm{sen}\,(\alpha-\beta),\ \mathrm{sen}\,B = \mathrm{sen}\,(\gamma-\alpha),\ \mathrm{sen}\,A = \mathrm{sen}\,(\beta-\alpha),$$

l'equazione della circonferenza circoscritta è

$$(2) \qquad \alpha_2\alpha_3\,\mathrm{sen}\,A + \alpha_1\alpha_3\,\mathrm{sen}\,B + \alpha_1\alpha_2\,\mathrm{sen}\,C = 0.$$

Corollario I. Le rette date dalle equazioni

$$(3) \quad \alpha_2\,\mathrm{sen}A + \alpha_1\,\mathrm{sen}B = 0,\ \ \alpha_3\,\mathrm{sen}A + \alpha_1\,\mathrm{sen}\,C = 0,\ \ \alpha_3\,\mathrm{sen}B + \alpha_2\,\mathrm{sen}C = 0$$

sono tangenti poichè passano ciascuna per uno dei vertici del triangolo, ed in questo unico punto tagliano la circonferenza ad esso circoscritta.

Corollario II. Se da un punto preso sulla circonferenza si abbassano perpendicolari sulle (3) queste sono date dalle espressioni

$$\frac{1}{sen\ C}(\alpha_2\, sen\ A+\alpha_1\, sen\ B),\ \frac{1}{sen\ B}(\alpha_3 sen A+\alpha_1 sen C),\ \frac{1}{sen\ A}(\alpha_3 sen B+\alpha_2 sen C);$$

il prodotto poi di due di esse, per esempio, della prima per la seconda eguaglia, per la (2), α_1^2. Cosicchè *se da un punto di una circonferenza si conducono perpendicolari su due tangenti e sulla loro corda di contatto, il quadrato di questa ultima è eguale al rettangolo delle altre due.*

Problema II. *Determinare l'equazione della circonferenza inscritta nel triangolo formato dalle rette* (1).

Uniti i punti di tangenza della circonferenza inscritta nel triangolo dato siano $\alpha_1'=0$, $\alpha_2'=0$, $\alpha_3'=0$ i lati del triangolo così formato ed A′, B′, C′ ne siano gli angoli: allora l'equazione della circonferenza è $\alpha_2'\alpha_3' sen A'+\alpha_1'\alpha_3' sen B'+\alpha_1'\alpha_2' sen C'=0$. Ma per ogni suo punto, sussistono le relazioni $\alpha_1'^2=\alpha_2\alpha_3$; $\alpha_2'^2=\alpha_1\alpha_3$; $\alpha_3'^2=\alpha_1\alpha_2$: ed anche, confrontando i due triangoli, le

$$A'=90^0-\frac{1}{2}A;\ B'=90^0-\frac{1}{2}B;\ \ C'=90^0-\frac{1}{2}C.$$

Sostituendo questi valori, l'equazione della circonferenza si tramuta nella

$$(4)\qquad \sqrt{\alpha_1}\,.\,cos\,\frac{1}{2}A+\sqrt{\alpha_2}\,.\,cos\,\frac{1}{2}B+\sqrt{\alpha_3}\,.\,cos\,\frac{1}{2}\,C=0,$$

ovvero posto

$$cos\,\frac{1}{2}A=\sqrt{l}\,,\ cos\,\frac{1}{2}B=\sqrt{m}\,,\ cos\,\frac{1}{2}C=\sqrt{n}$$

$$(5)\qquad l^2\alpha_1^2+m^2\alpha_2^2+n^2\alpha_3^2-2mn\alpha_2\alpha_3-2ln\alpha_1\alpha_3-2lm\alpha_1\alpha_2=0.$$

II. Ellisse ed Iperbola.

63. Problema I. *Trovare l'equazione della tangente alle curve*

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1\,,$$

ellisse od iperbola riferite agli assi, dato il punto di tangenza (x_1y_1)

Per le coordinate di due punti x_1y_1, x_2y_2 presi sulla curva hanno luogo le

$$\frac{x_1^2}{a^2}\pm\frac{y_1^2}{b^2}=1,\ \frac{x_2^2}{a^2}\pm\frac{y_2^2}{b^2}=1;\ \text{donde}\ \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\mp\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\right)$$

La equazione della secante che li congiunge è

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\mp\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\right);$$

e pertanto quella della tangente che se ne deriva ponendo $x_1=x_2$, $y_1=y_2$,

$$(2)\qquad \frac{y-y_1}{x-x_1}=\mp\frac{b^2x_1}{a^2y_1};\ \text{ovvero}\ \frac{xx_1}{a^2}\pm\frac{yy_1}{b^2}=1\,.$$

Corollario. Essendo $\frac{x^2+y^2}{a^2}=1$ l'equazione della circonferenza concentrica colle (1), e descritta con raggio a, la sua tangente in $x_1y'_1$ data da $\frac{xx_1+yy'_1}{a^2}=1$ taglia quella data dalla (2) in un punto dell' asse $2a$.

Problema II. *Trovare l'equazione delle tangenti condotte dal punto* x_1y_1 *alle curve* (1).

Procedendo come nel n.° 61 si trova

$$(3)\qquad \left(\frac{x_1^2}{a^2}\pm\frac{y_1^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}-1\right)=\left(\frac{xx_1}{a^2}\pm\frac{yy_1}{b^2}-1\right)^2$$

Corollario I. *Trovare l' equazione delle due tangenti condotte alla curva (1) parallelamente alla retta*

$$(4)\qquad y=mx+n.$$

Il punto $x_1 y_1$ dovendo giacere sulla (4) abbiamo $\frac{y_1}{x_1}=m+\frac{n}{x_1}$ e siccome esso è ad una distanza maggiore di ogni quantità assegnabile da un punto qualunque della retta, le quantità $\frac{y_1}{x_1}$ ed $\frac{n}{x_1}$, $\frac{1}{x_1}$ divengono m e 0: diviso ambo i membri della (3) per x_1^2 immediatamente si forma l'equazione cercata:

$$(5)\qquad \left(\frac{1}{a^2}\pm\frac{m^2}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}-1\right)=\left(\frac{x}{a^2}\pm\frac{my}{b^2}\right)^2$$

Corollario II. Le tangenti condotte alla circonferenza $x^2+y^2=a^2$, o da $x_1\ y'_1$ o parallele a $y=m'x+n$ hanno per equazioni

$$\left(\frac{x_1^2+y_1'^2}{a^2}-1\right)\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}-1\right)=\left(\frac{xx_1+yy'_1}{a^2}-1\right)^2,$$

$$\left(\frac{1+m'^2}{a^2}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}-1\right)=\left(\frac{x+m'y}{a^2}\right)^2.$$

Laonde per $y'_1=\frac{a}{b}y_1$, $m'=\frac{a}{b}m$ esse concorrono respettivamente colle tangenti (3) (5) condotte alla ellisse nel medesimo punto dell' asse.

64. Problema I. *Trovare l'equazione della normale alle curve*

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1,$$

condotta per il punto $x_1\ y_1$ *preso su queste.*

Dalla definizione della normale n.° 54 immediatamente si trae:

$$(2)\qquad \frac{y-y_1}{x-x_1}=\pm\frac{a^2y_1}{b^2x_1}\ \text{od}\ \frac{a^2x}{x_1}\mp\frac{b^2y}{y_1}=c^2,\ \text{od}\ \frac{x}{e^2x_1}\mp\frac{b^2y}{c^2y_1}=1.$$

Corollario. *I segmenti intercetti sull'asse 2a fra la normale e la ordinata del punto della curva per cui è condotta, fra la tangente e la ordinata del punto di contatto si dicono* su-normale, su tangente *e si designano con* S_n, S_t; *si nominano poi* normale N *e* tangente T *le lunghezze comprese fra il punto della curva e quello in cui esse tagliano l'asse 2a.*

Per l' equazioni (2) del n.° 63 e (2) si hanno le espressioni

$$(3)\qquad S_n=(1-e^2)x_1,\quad N=\sqrt{y_1^2+(1-e^2)^2x_1^2},$$

$$S_t=\frac{a^2-x_1^2}{x_1},\ T=\frac{1}{x_1}\sqrt{(a^2-x_1^2)(a^2-e^2x_1^2)}.$$

Problema II. *Condurre le normali alle* (1) *per il punto* x_1y_1. Indicando con XY le coordinate del punto ove la normale taglia la curva, la sua equazione è $\frac{a^2x}{X}\mp\frac{b^2y}{Y}=c^2$, e poichè su di essa giace il punto $x_1\ y_1$ abbiamo la relazione $\frac{a^2x_1}{X}\mp\frac{b^2y_1}{Y}=c^2$. Pertanto i punti delle curve le cui normali passano per il punto dato coincidono colle intersezioni di queste colla iperbola

$$(4)\qquad c^2XY-a^2x_1\,.\,Y\pm b^2y_1X=0$$

i cui asymptoti $c^2Y \pm b^2 y_1 = 0$, $c^2X - a^2 x_1 = 0$ sono paralleli agli assi $2a$, $2b$.

65. Problema *Determinare i raggi vettori condotti dai fuochi ad un punto delle curve*

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Essendo ($x = \pm c$, $y = 0$) le coordinate di punti equidistanti dal centro e nominati fuochi, ed $x_1 y_1$ quelle di un punto delle (1), pei raggi vettori si hanno: $\rho_1^2 = (x_1 - c)^2 + y_1^2$, $\rho_2^2 = (x_1 + c)^2 + y_1^2$. Ma $x_1^2 + y_1^2 = \pm b^2 + e^2 x_1^2$, ed $\pm b^2 + c^2 = a^2$; e per conseguenza $\rho_1^2 = a^2 - 2cx_1 + e^2 x_1^2 = (a - ex_1)^2$, $\rho_2^2 = (a + ex_1)^2$.

Per la ellisse avendo $e < 1$, $x_1 < a$ i raggi vettori (di cui deve prendersi solo il valore assoluto) sono

$$(2) \qquad \rho_1 = a - ex_1, \quad \rho_2 = a + ex_1,$$

e danno per somma $\rho_1 + \rho_2 = 2a$. Laonde *la somma dei raggi vettori condotti dai fuochi ad un punto qualunque della ellisse è costante ed eguale all' asse maggiore.*

Per la iperbola essendo $e > 1$, $x_1 > a$, abbiamo

$$(3) \qquad \rho_1 = ex_1 - a, \quad \rho_2 = ex_1 + a, \text{ ovvero } \rho_2 - \rho_1 = 2a.$$

Pertanto *nella iperbola la differenza dei raggi vettori condotti dai fuochi ad un punto della curva è costante ed eguale all' asse trasverso.*

Corollario I.° *Le polari dei fuochi nominansi le* direttrici *della curva*. Esse hanno per equazioni $x = \pm \frac{a^2}{c}$. E per le espressioni delle distanze δ_1, δ_2 del punto della curva $x_1 y_1$ da esse date da

$$\delta_1 = \frac{a}{c}(a - ex_1) = \frac{1}{e}(a - ex_1) = \frac{1}{e}\rho_1 \quad \delta_2 = \frac{1}{e}(a + ex_1) = \frac{1}{e}\rho_2$$

si trae il

Teorema. *La distanza di un punto della curva da un fuoco sta alla sua distanza dalla direttrice corrispondente nel rapporto costante, e : 1.*

Problema II. *Determinare le lunghezze delle perpendicolari* P_1, P_2 *abbassate dai fuochi* $F(+c,0)$, $F_1(-c,0)$ *sulla tangente alle curve* (1)

Essendo $\frac{xx_1}{a^2} \pm \frac{yy_1}{b^2} = 1$ l'equazione della tangente, esse sono espresse da

$$(4)\ P_1 = \frac{\rho_1 : a}{\sqrt{\left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}\right)}} = \frac{\rho_1}{\sqrt{\rho_1\rho_2 : b^2}}\,,\quad P_2 = \frac{\rho_2 : a}{\sqrt{\left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}\right)}} = \frac{\rho_2}{\sqrt{\rho_1\rho_2 : b^2}}$$

Corollario I. Dalle (4) si deduce $P_1P_2 = b^2$; cosicchè si ha il

Teorema. *Il rettangolo costruito sulle perpendicolari abbassate dai fuochi sulla tangente è costante ed eguaglia il quadrato del semi-asse minore per la ellisse, e del semi-asse immaginario per la iperbola.*

Corollario II. Designato con MT la tangente, con M il punto $x_1\ y_1$, per le (4) abbiamo

$$\frac{P_1}{\rho_1} = \frac{1}{\sqrt{\rho_1\rho_1 : b^2}} = sen\,FMT\,,\quad \frac{P_2}{\rho_2} = \frac{1}{\sqrt{\rho_1\rho_2 : b^2}} = sen\,F_1MT:$$

e quindi *i raggi vettori condotti dai fuochi ad un punto della curva (1) formano colla tangente in esso angoli eguali.* Per la ellisse la tangente è la *bisetrice esterna* dell' angolo chiuso dai raggi focali, mentre per la iperbola essa è la *bisetrice interna*: ed inversamente la normale è *bisetrice interna* nella prima, ed *esterna* nell' altra curva.

Corollario III.* Una linea di secondo ordine può essere definita come il luogo geometrico di un punto le cui distanze da un

punto e da una retta dati di posizione nel piano (fuoco e direttrice) conservano fra di esse un rapporto costante.

COROLLARIO IV.* Rappresentando con

$$\alpha_1 = x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha - p = 0,\quad \alpha_2 = x\cos\beta + y\,\mathrm{sen}\,\beta - p_1 = 0$$
$$\alpha_3 = x\cos\gamma + y\,\mathrm{sen}\,\gamma - p_2 = 0$$

tre rette riferite ad assi ortogonali *l'equazione* $\alpha_1^2 + \lambda^2\alpha_2^2 - \mu^2\alpha_3^2 = 0$ *rappresenta una tal curva di secondo ordine per cui ciascuna delle rette* $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, *è la polare del punto d' intersezione dell' altra con la* $\alpha_3=0$. Infatti essa può scriversi

$$\alpha_1^2 = (\mu\alpha_3 - \lambda\alpha_2)(\mu\alpha_3 + \lambda\alpha_2),\quad \lambda^2\alpha_2^2 = (\mu\alpha_3 - \alpha_1)(\mu\alpha_3 + \alpha_1).$$

Dalla prima evidentemente appare essere le due rette

$$\mu\alpha_3 - \lambda\alpha_2 = 0,\quad \mu\alpha_3 + \lambda\alpha_2 = 0,$$

le quali si tagliano nel punto $\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$, tangenti alla curva, e la $\alpha_1=0$ la loro corda di contatto; per conseguenza il punto ($\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$) è il polo di $\alpha_1=0$. In pari modo dalla seconda si deduce che il punto $\alpha_1=0, \alpha_3=0$ è il polo della retta $\alpha_2=0$.

Se posto, $\lambda=1$, $\beta=90^0+\alpha$ e quindi le due rette $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$ scambievolmente perpendicolari, si moltiplica l'equazione $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \mu^2\alpha_3^2 = 0$, per $(1+\sigma^2)$, σ quantità arbitraria qualunque, la

$$\alpha_1^2(1+\sigma^2) + \alpha_2^2(1+\sigma^2) - \mu^2\sigma_3^2 = (\alpha_1 + \sigma\alpha_2)^2 + (\sigma\alpha_1 - \alpha_2)^2 - \mu^2\sigma_3^2 = 0$$

significa come le rette $\alpha_1 + \sigma\alpha_2 = 0$, $\sigma\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ perpendicolari l'una all'altra e condotte per il punto ($\alpha_1=0, \alpha_2=0$) hanno respettivamente i punti ($\sigma\alpha_1 - \alpha_2 = 0$, $\alpha_3=0$), ($\alpha_1 + \sigma\alpha_2 = 0$, $\alpha_3=0$) per poli.

Laonde per il n° 60 l'equazione

$$(1)\qquad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \mu\alpha_3^2 = 0$$

rappresenta una linea di secondo ordine di cui un fuoco concide col punto $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$.

66. Allorchè le equazioni della ellisse, e della iperbola sono riferite ad una coppia di diametri conjugati, le cui lunghezze si rappresentano con a_1, b_1, dovendo annullarsi il coefficiente del termine xy, esse assumono la forma

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a_1^2} \pm \frac{y^2}{b_1^2} = 1 .$$

Adoperando i metodi già svolti l'equazione di una tangente qualunque ($x_1 y_1$ essendo il suo punto di contatto) riferita a questi assi coordinati è

$$(2) \qquad \frac{xx_1}{a_1^2} \pm \frac{yy_1}{b_1^2} = 1 .$$

Teorema. *La tangente condotta alla ellisse od alla iperbola per la estremità di un diametro qualunque* $2.a_1$ *è parallela al diametro a questo conjugato* $2b_1$.

Infatti l' equazione della curva a tali diametri conjugati riferita essendo $\frac{x_1^2}{a_1^2} \pm \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1$, quella della tangente il cui punto di contatto è ($x = \pm a_1$, $y = 0$) viene espressa dalla $x = \pm a_1$, e pertanto si dirige parallelamente al diametro $2b_1$.

Problema I. *Data la curva*

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

riferita al centro e agli assi trovare l'equazione del diametro conjugato a quello che passa per il punto ($x_1 y_1$) *preso su di essa.*

La equazione di tale diametro dovendo essere quella di una retta condotta per la origine, centro della curva, parallelamente alla tangente in $x_1 y_1$ è

$$(4) \qquad \frac{xx_1}{a^2} \pm \frac{yy_1}{b^2} = 0.$$

Corollario. Siano α, β gli angoli che il diametro condotto per $(x_1 y_1)$ ed il suo conjugato formano coll'asse delle x, per essi abbiamo

$$tang\,\alpha = \frac{y_1}{x_1} \quad tang\,\beta = \mp\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}: \text{ donde}$$

(5) $$tang\,\alpha \;\; tang\,\beta = \mp\frac{b^2}{a^2}.$$

Problema II. *Determinare le coordinate $(x_2 y_2)$ della estremità del diametro conjugato a quello condotto per $x_1 y_1$.*

Queste dovendo soddisfare alle equazioni

$$\frac{xx_1}{a^2} \pm \frac{yy_1}{b^2} = 0, \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

hanno i valori

(6) $$x_2^2 = \pm\frac{a^2}{b^2} y_1^2, \quad y_2^2 = \pm\frac{b^2}{a^2} x_1^2.$$

Problema III. *Esprimere le lunghezze di un semi-diametro, a_1, condotto pel punto $x_1 y_1$ della curva e del suo conjugato, b_1, ambedue in funzione della x_1.*

Avendo $a_1^2 = x_1^2 + y_1^2$, $b_1^2 = x_2^2 + y_2^2$, per le (3) e le (6) queste espressioni si riducono nelle

(7) $$a_1^2 = e^2 x_1^2 \pm b^2, \quad \pm b_1^2 = a^2 - e^2 x_1^2.$$

Corollario I. Da questi valori per la ellisse si ottiene le $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$. Laonde *la somma dei quadrati di una coppia di semi-diametri conjugati nella ellisse è costante ed eguale alla somma dei quadrati dei semi-assi.*

E per la iperbola si deduce la $a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$, ovvero *la differenza dei quadrati dei semi-diametri conjugati nella iperbola è costante ed eguale alla differenza dei quadrati dei semi-assi.*

Se $a = b$, anche $a_1 = b_1$, e *l'iperbola* in cui i diametri conjugati in ogni sistema sono eguali dicesi *equilatera* (n.° 50.)

Problema IV. *Esprimere la lunghezza della perpendicolare abbassata dal centro della curva* (3) *sulla tangente condotta per il punto* x_1y_1 *preso su di essa.*

Questa è

$$(8) \qquad p=\frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}}}=\frac{ab}{b_1},$$

per il *Problema precedente* e solamente prendendone il valore assoluto.

Problema V *Determinare l'angolo compreso fra una coppia qualunque di diametri conjugati appartenenti alle curva* (3)

Preso sulla curva un punto M $(x_1\ y_1)$ e condottovi la tangente MT; congiunto, col centro O, i due semi-diametri conjugati, $2a_1$ $2b_1$ coincidono con OM ed ON, questo essendo parallelo alla tangente MT ed N designando il punto ove esso taglia la curva.

L'angolo Θ compreso frai diametri eguagliando quello formato da OM e dalla MT, nominata p la perpendicolare abbassata da O su MT, abbiamo

$$(9) \qquad sen\,\Theta=\frac{p}{a_1}=\frac{ab}{a_1b_1}$$

Corollario. Dalla (9) derivando $a_1b_1 sen\,\Theta=ab$ può enunciarsi il

Teorema. *Il parallelogrammo costruito sui semi-diametri conjugati di una ellisse o di una iperbola ha un area costante cd eguale al rettangolo dei semi-assi.*

67. La iperbola

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

essendo l'unica curva di secondo ordine che abbia gli asymptoti reali,

$$(2) \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1,$$

(n.° 55) gode di proprietà a questi relative non esistenti nella ellisse e nella parabola.

Teorema I. *Gli asymptoti coincidono colle diagonali del parallelogrammo costruito su due diametri conjugati qualunque.*

Infatti essendo $2a_1$, $2b_1$ tali diametri, ed $\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=1$, l'equazione della curva ad essi riferita, le diagonali del parallelogrammo i cui lati eguagliano $2a_1$ $2b_1$ hanno per equazioni

$$\frac{x}{a_1}-\frac{y}{b_1}=0,\ \frac{x}{a_1}+\frac{y}{b_1}=0,$$

le quali sono quelle che esprimono gli asymptoti.

Corollario I. Per la iperbola equilatera, $a_1=b_1$, il parallelogrammo di due diametri conjugati trasformandosi in una losanga *gli asymptoti si tagliano ad angolo retto.*

Corollario II. *Il segmento di una tangente qualunque compreso fra gli asymptoti è bisecato nel punto di contatto* M *ed eguaglia il diametro conjugato ad* OM, (*O essendo il centro dello curva*). Prendendo per assi coordinati il semi-diametro $OM=a_1$ ed il suo conjugato, l'equazione degli asymptoti, e della tangente in M sono

$$\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=0,\ x=a_1;$$

e quindi il segmento determinato su questa è $y=\pm b_1$.

Teorema II. *Se una trasversale qualunque taglia la iperbola nei punti* a_1, a_2 *e gli asymptoti in* b_1, b_2, *i segmenti* a_1b_1, a_2b_2 *compresi fra questi e la curva sono eguali.*

Prendendo per assi coordinati un diametro prrallelo alla trasversale ed il suo conjugato, questo evidentemente biseca le due rette a_1a_2, b_1b_2, e per conseguenza da $a_1i=ia_2=\frac{a_1a_2}{2}$, $b_1i=ib_2=\frac{b_1b_2}{2}$ si trae $b_1i-a_1i=ib_2-ia_2$ ovvero $a_1b_1=a_2b_2$ (n.° 55.)

68. Problema I. *Trovare l'equazione della iperbola riferita agli asymptoti.*

Prendendo gli asymptoti per assi coordinati nell'equazione non possono comparire i termini lineari in x, ed y (l'origine coincidendo col centro della curva) ne quelli che contengono i quadrati delle variabili (gli assi tagliando la curva all'infinito); e quindi essa ha la forma:

$$(1) \qquad xy=K^2. \text{ (n. 55)}$$

Per esprimere K^2 mediante i semi-assi della curva, si osservi come l'asse trasverso bisecando l'angolo compreso fra gli asymptoti, le cordinate del suo vertice $x=y=K$ si determinano ponendo $x=y$ nella (1); e designando con α l'angolo degli asymptoti si ha $a^2=2K^2+2K^2 \cos\alpha$. Inoltre l'asse immaginario bisecando l'angolo $180^0-\alpha$, e le coordinate del suo vertice essendo date da $x=-y=k\sqrt{-1}$, ha per valore $-b^2=-2K^2+2K^2 \cos\alpha$. Formando ora la differenza delle espressioni di $a^2, -b^2$ si ottiene

$$(2) \qquad K^2=\frac{a^2+b^2}{4} \text{ (n.}^0 \text{ 55).}$$

Problema II. *Determinare l'equazione della tangente alla iperbola $xy=K^2$, il punto di contatto x_1y_1 essendo noto.*

Preso sulla curva un punto qualunque x_2y_2 la trasversale condotta per x_1y_1, x_2y_2 viene rappresentata dalla equazione

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \text{ ovvero a causa di } y_2=\frac{K^2}{x_2}, \quad y_1=\frac{K^2}{x_1} \text{ dalla}$$

$$(3) \qquad y_1x+x_2y=2K^2+y_1x_2.$$

Questa esprime la tangente allorchè y_2, x_2 eguagliano y_1, x_1; quindi diviene

(4) $$x_1y+y_1x=2k^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2),\ \text{ovvero}\ \frac{y}{y_1}+\frac{x}{x_1}=2.$$

Corollario. I segmenti $2x_1$, $2y_1$ che la tangente determina sugli asymptoti formano il rettangolo $4x_1y_1=4k^2$. Laonde *il triangolo che una tangente qualunque forma cogli asymptoti ha una area costante ed eguale al doppio dell'area del parallelogrammo formato dalle coordinate del punto di tangenza.*

69. Le curve di secondo ordine riferite ad assi coordinati tali che uno, quello delle x, coincida con un diametro e l' altro, quello delle y, colla tangente condotta per uno dei punti ove esso interseca la linea a cui appartiene, sono rappresentate dall'equazione generale

(1) $$Ay^2+Cx^2+Ex=0:$$

in quanto che la curva essendo simmetrica intorno all'asse delle x, e l'origine delle coordinate giacendo sul suo perimetro, la equazione sua non può contenere termini in $x.y$ ed in y ed il termine costante ovvero indipendente dalle variabili. Di guisa che essendo

$$\frac{y^2}{b_1^2}+\frac{x^2}{a_1^2}=1\,,\quad \frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=1$$

l' equazioni della ellisse e della iperbola riferite ad una coppia qualunque di diametri conjugati, mediante la trasformazione degli assi, $x=X-a_1$ per la ellisse, e $x=X+a_1$ per la iperbola, esse divengono

$$y^2=\frac{2b_1^2}{a_1}x-\frac{b_1^2}{a_1^2}x^2,\quad y^2=\frac{2b_1^2}{a_1}x+\frac{b_1^2}{a_1^2}x^2;$$

in cui la quantità $\frac{2b_1^2}{a_1}$ nominasi *il parametro della curva* relativamente al diametro $x_1=0$, e *parametro principale* se tale diametro diviene un asse della linea (n.[i] 11, 12).



Teorema I. *La parabola puo essere considerata come il limite a cui converga una ellisse od una iperbola allorchè, rimanendo costante la distanza di un fuoco dal vertice a questo corrispondente l'asse maggiore o trasverso cresce indefinitamente e tende a divenire maggiore di ogni lunghezza assegnabile.*

L' equazioni della ellisse e della iperbola riferite al vertice e all' asse sono

$$y^2=2\cdot\frac{b^2}{a}x\mp\frac{b^2}{a^2}x^2.$$

E denotando con δ la distanza di un vertice dal fuoco vicino abbiamo

$$\delta=a-\sqrt{(a^2-b^2)},\ \delta=\sqrt{a^2+b^2}-a,\ \text{ovvero}\ b^2=2a\delta\mp\delta^2$$

e per conseguenza

$$y^2=\left(4\delta x\mp\frac{2\delta^2}{a}x\right)\mp\left(2\frac{\delta}{a}\mp\frac{\delta^2}{a^2}\right)x^2.$$

Supponendo ora a infinito, i termini che contengono a per denominatore annullandosi, questa si trasforma in $y^2=4\delta x$ equazione che rappresenta una parabola che ha il medesimo vertice ed asse delle curve da cui è generata.

Teorema II. *Il parametro principale di una curva di secondo ordine eguaglia la corda condotta per un fuoco perpendicolarmente all' asse su cui questo punto giace.*

Infatti essendo

$$(2)\qquad y^2=2\frac{b^2}{a}x\mp\frac{b^2}{a^2}x^2$$

l'equazioni della ellissi e della iperbola, la corda focale f eguaglia il doppio di quella ordinata della curva corrispondente alla ascissa $x=\delta=a-\sqrt{a^2-b^2}$ per la ellisse ed $x=\sqrt{a^2+b^2}-a$ per la iper-

bola. Per conseguenza si ha

$$\frac{f^2}{4}=\frac{b^2}{a^2}\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)=\frac{b^4}{a^2} \quad \text{od} \quad f=2\frac{b^2}{a}$$

$$\frac{f^2}{4}=\frac{b^2}{a^2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)=\frac{b^4}{a^2} \quad \text{od} \quad f=2\frac{b^2}{a}:$$

similmente si dimostra per la parabola.

Corollario Avendo posto, (n.i 11, 12) $a^2\mp b^2=a^2e^2$, l'equazione (2) si trasforma nella seguente:

$$y^2=(e^2-1)\left[\mp 2\,a\,x+x^2\right].$$

Teorema II. *Il semi-parametro principale di una curva di secondo ordine eguaglia la projezione della normale sopra il raggio vettore condotto per il punto ove questa taglia la curva.*

Essendo $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$ l'equazioni della ellisse e della iperbola riferite al centro ed agli assi, ed

$$\frac{x}{e^2x_1}\mp\frac{b^2y}{c^2y}=1, \quad \frac{y}{x-ae}=\frac{y_1}{x_1-ae}$$

quelle della normale, e del raggio vettore ambedue condotti per il punto $M(x_1y_1)$ preso sul perimetro della curva, la perpendicolare abbassata sul raggio vettore dal punto ($y=0$, $x=e^2x_1$) ove la normale incontra l'asse maggiore per la ellisse, e l'asse traverso per la iperbola è rappresentata dalla equazione:

(3) $\frac{y}{x-e^2x_1}=\frac{ae-x_1}{y_1}$, ovvero da $yy_1+x(x_1-ae)+e^2x_1(ae-x_1)=0$.

Ma la lunghezza P della perpendicolare menata da M sopra la (3), la quale lunghezza evidentemente è la projezione cercata, ha per

espressione:

$$P=\frac{y_1^2+(x_1-ae)(1-e^2)x_1}{\sqrt{y_1^2+(x_1-ae)^2}};$$

e, a cagione della relazione, $y_1^2=(1-e^2)(a^2-x_1^2)$, (n.i 11, 12,) essa si trasforma nella

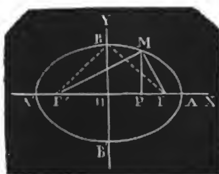
$$P=\frac{a(1-e^2)(a-ex_1)}{(a-ex_1)}=a(1-e^2)=\frac{b^2}{a}.$$

In simil modo si dimostra questa proposizione per la parabola.

Metodi per descrivere la Ellisse e per tracciarne le tangenti.

70. Problema I. *Dati in grandezza e posizione gli assi di una Ellisse descriverla per punti.*

Metodo I. Essendo AA′, BB′ gli assi, costruiti i triangoli rettangoli BOF, BOF′ di cui un cateto eguaglia il semi-asse minore OB e l'ipotenusa il semi-asse maggiore OA, i loro vertici F, F′ sono i fuochi della curva. Quindi da A′ come origine preso sopra AA′ un segmento qualunque A′P maggiore di A′O, si descrivano due archi con A′P per raggio e col centro successivamente in F′ ed in F; di poi col centro in ciascuno di questi punti e con raggio eguale a PA=AA′—A′P descritti due altri archi, i quattro punti ove intersecano i precedenti appartengono alla eliisse. In simil modo con n operazioni si determinano $4n$ punti i quali congiunti con una linea continua formano la ellisse.



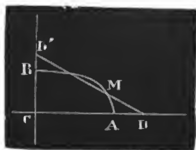
Metodo II. Descritta una circonferenza avente per diametro l' asse maggiore $A'A$, condotta la sua ordinata MP, e divisa in N in modo che sia $\frac{NP}{PM}=\frac{CB}{CA}$, i punti N così determinati appartengono alla curva.



Metodo III. Preso sovra l'asse minore BB' un segmento $Cb<CA-CB$ differenza dei due semi-assi, $a-b$, ponendo in b il centro e con raggio eguale ad $a-b$ si determini sull' asse maggiore AA' il punto α; quindi condotta la retta $b\alpha$, su di essa si prenda la lunghezza $\alpha N=b$: i punti N che così si ottengono sono sulla ellisse.

Problema II. *Dati in grandezza e posizione gli assi di una ellisse descriverla per moto continuo.*

Metodo I. Determinati i fuochi F ed F', fissato in questi le estremità di un filo la cui lunghezza eguagli AA', uno stile che si muove in modo da tendere continuamente il filo, traccia la ellisse.



Metodo II. Se una riga $DD'=CA+CB$ la quale porta in M ($MD=CB$) uno stile si muove in guisa che le sue estremità D' e D siano ciascuna sopra uno dei lati dell' angolo retto BCA, lo stile traccia una ellisse i cui assi sono 2CA, 2CB.

Lemma I. *Se in una ellisse una tangente qualunque taglia due diametri conjugati, il rettangolo costruito sui segmenti che ciascuno di essi determina sulla tangente contati prendendo il punto di contatto per origine eguaglia il quadrato del semi-diametro ad essa parallelo.*

Preso per assi coordinati delle y e delle x il diametro parallelo alla tangente ed il suo conjugato (le cui lunghezze sono indi-

cate con $2a_1$, $2b_1$) essendo $M(x_0 y_0)$ un punto qualunque della curva abbiamo

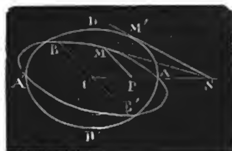
$$yx_0 - xy_0 = 0,\quad b_1^2 xx_0 + a_1^2 yy_0 = 0,\quad x = a_1$$

per l'equazioni dei due diametri conjugati di cui uno ha una estremità nel punto **M** e della tangente. I segmenti su questa hanno evidentemente per valori $y = \frac{y_0}{x_0} a_1$, $y_2 = -\frac{b_1^2 x_0}{a_1^2 y_0} . a_1$ e quindi il rettangolo compreso è $y_1 y_2 = -b_1^2$.

Problema III. *Dati in grandezza e posizione due semi-diametri conjugati di una ellisse, costruire i suoi assi.*

Siano Oa, Ob, i semi diametri conjugati, la retta AA' condotta per l'estremità a di uno parallelamente all'altro è tangente alla curva. Determinato sovra Oa un punto M, (il quale giaccia relativamente ad a dalla parte opposta di O) e tale che per esso sussista la relazione $Oa \times aM = Ob^2$ si descriva nna circonferenza che passi per O e per M e che abbia il centro sulla tangente AA' in C. Le rette OA, OA' che congiungono i punti A,A', (in cui questa è della circonferenza segata) con O rappresentano per il Lemma precedente, e per essere l'angolo A'OA retto, gli assi della ellisse.

Problema IV. *Costruire per punti una ellisse allorchè son dati in grandezza e posizione due suoi diametri conjugati.*



Avendo $AA' = 2a_1$, $BB' = 2b_1$ si costruisca la ellisse ADA'D' prendendo per assi le rette $AA' = 2a_1$, $DD' = BB' = 2b_1$, l'equazione $\frac{y^2}{b_1^2} + \frac{x^2}{a_1^2} = 1$, secondochè è riferita agli assi coordinati obliquangoli AA' BB', ovvero agli assi ortogonali AA', DD' può esprimere l'el-

lisse richiesta o la ADA′D′, e siccome i due sistemi d'assi coordinati hanno il medesimo asse delle x così ad una data ascissa CP corrispondono per ambedue le curve ordinate eguali in lunghezza. Laonde condotto da P le PM′, PM respettivamente parallele alle CD, e CB, il punto M per cui PM=PM′ ed è eguale alla ordinata della ADA′D′ è un punto della richiesta ellisse.

Problema V. *Data una retta e gli assi di una ellisse (in posizione e grandezza) determinare i punti in cui esse s'intersecano senza tracciare la curva.*

Siano CA, CB i semi-assi della ellisse, e sia SM la retta data (S essendo il punto di essa che giace sul prolungamento di AA); descritta la circonferenza ADAD sull'asse maggiore AA, si congiunga il punto B con un punto qualunque m di SM e si conducano la mp perpendicolare ad AA e la Bm e sia Q il punto ove l'ultima taglia la AA. Condotta la DQ, il punto di sezione n di questa con pm cogiunto con S siano N, n' i punti in cui Sn incontra la circonferenza, le rette NP, N′P′ perpendicolari ad AA determinano sopra la retta data Sm i punti M ed M′ che sono quelli nei quali la ellisse è da essa intersecata.

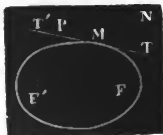
Infatti abbiamo

$$\frac{nm}{mp}=\frac{BD}{BC} \text{ ovvero } \frac{np}{mp}=\frac{DC}{BC}, \text{ ed } \frac{N'P'}{M'P'}=\frac{NP}{MP}=\frac{np}{mp}$$

e quindi i punti M ed M′ che dividono le rette N′P′, NP nel rapporto dei semi-assi CA : CB sono punti che insieme appartengono alla secante ed alla curva.

Problema VI. *Condurre la tangente in un punto M di una ellisse di cui sono dati gli assi, (in grandezza e posizione).*

Metodo I. Essendo AA′, BB′ gli assi si descriva sovra AA′ come diametro una circonferenza ADA′D′ e sia M′ il punto ove è incontrata dalla perpendicolare abbassata da M sovra AA′. La tangente in M′ a tale circonferenza tagli il prolungamento di AA′ in S, la SM èla tangente richiesta.

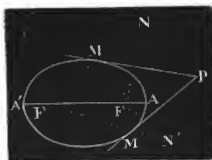


Metodo II. Determinati i fuochi F ed F′ della ellisse si unisca con ciascuno di questi il dato punto di tangenza M; quindi sopra il prolungamento di F′M si prenda la lunghezza MN=FM, la perpendicolare MTT′ abbassata da M sopra la FN è la richiesta tangente.

Corollario I. *Condurre la tangente in un punto M di una ellisse di cui sono dati in grandezza e posizione due diametri conjugati.* Costruita la ellisse ausiliare ADA′D′ (Problema IV.), da M si conduca la ordinata obliqua MP, e da P la PM′. In M′ all'ellisse ADA′D′ si descriva la tangente e sia S il punto in cui sega la AA′; la MS è la tangente alla ellisse data.

Corollario II. *Condurre una normale in un punto M appartenente ad una ellisse della quale sono noti in grandezza e posizione gli assi.* Determinati i fuochi F, F_1 della curva, tirati i raggi focali MF, MF_1, sopra uno di qnesti si determini un segmento M*f* eguale all'altro, M*f*=MF_1: la normale è la perpendicolare abbassata da M sulla congiungente *f*F.

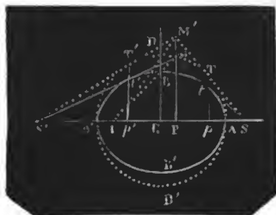
Problema VII. *Condurre le tangenti da un punto P esterno ad una ellisse della quale sono dati in grandezza e posizione gli assi.*



Metodo I. Determinati i fuochi, col centro in uno di questi F e con raggio F′MN=AA′ si descriva l'arco NN′ quindi prendendo per centro il punto dato P e per raggio la sua distanza PF dall'altro fuoco F si tracci l'arco NFN′, N ed N′ siano i

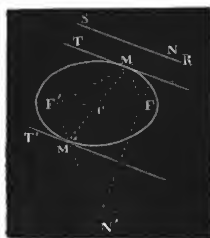
punti in cui questi archi si tagliano. Tirate le rette FN, FN′ le perpendicolari PM, PM su queste abbassate da P sono le due tangenti alla ellisse.

Metodo II. Sia M il punto esterno; tirata la ordinata MP, e le congiungenti MB, e DI (I essendo il punto in cui la prima incontra l'asse AA′), sia M′ la intersezione di DI col prolungamento di MP. Da M′ menate alla circonferenza le tangenti M′TS, M′T′S′. (S′, S sono i punti d'intersezione con AA′), le rette SM, S′M coincidono colle tangenti alla ellisse, ed i punti di contatto *t*, ed *t′* sono determinati in esse dalle ordinate condotte dei punti di contatto T, T′ delle tangenti alla circonferenza.



Problema VIII. *Condurre parallelamente con una data retta* RS *le tangenti ad una ellisse della quale sono dati gli assi in grandezza e posizione.*

Metodo I. Essendo F, F′ i fuochi della ellisse, ed SR la retta data, da uno di essi F su questa si conduca la perpendicolare indefinita FNN′ quindi ponendo il centro nell'altro fuoco F′ e con raggio F′N eguale all'asse maggiore si descriva un arco di circonferenza che la tagli nei punti N ed N′: dai punti M, M′ in cui le congiungenti F′N, F′N′ incontrano la curva condotte le rette TM, T′M′ paralelle alla SR, (rette repettivamente perpendicolari alle FN, FN′ nel loro punto di mezzo), queste sono le tangenti alla ellisse.



Metodo II. Dal centro della curva tirata una retta Cp parallela alla retta data, e per un suo punto qualunque p la congiungente pB, e la ordinata pp'. sia p' il punto ove questa è secata dalla congiungente i punti I. D, (I essendo il punto d'intersezione di pB coll'asse AA'). Si traccino le due tangenti M'S, N'S' paralelle colla Cp alla circonferenza ADA'D' (S', S siano i punti in cui segano AA'). le rette SM, S'N paralelle a Cp sono le richieste tangenti.

Metodi per descrivere la Iperbola e per tracciarne le tangenti.

71. Problema I. *Dati in grandezza e posizione gli assi di una Iperbola descriverla per punti.*

Metodo. I. Essendo AA' l'asse trasverso, e BB' l'immaginario i punti determinati sopra AA' prendendo OF=OF'=BA sono i due fuochi della curva. Quindi da A' presa una lunghezza maggiore di A'F, con questa per raggio e ponendo successivamente centro nei fuochi si descrivano due archi: dipoi presa per raggio una altra lunghezza la cui differenza colla precedente sia AA', e similmente assumendo ciascun fuoco per centro si traccino due nuovi archi. Questi tagliano i primi in quattro punti appartenenti alla Iperbola richiesta.

Metodo II. Preso un punto qualunque P sul prolungamento

dell'asse trasverso A'A, da esso si conduca alla circonferenza descritta sopra AA' come diametro la tangente PN: quindi determinati i segmenti (contati assumendo P per origine) $Pn' = CB = b$, $Pm = CA = a$, si conduca da n' alla congiungente mm la paralella $n'N$. Il punto M sulla perpendicolare ad AA' per cui PM=PN appartiene alla iperbola richiesta.



Problema II. *Dati in grandezza e posizione gli assi di una iperbola descriverla per moto continuo.*

Una riga di cui una estremità è imperniata per modo che possa liberamente ruotare intorno ad un punto F porta in una sua parte un anello fisso munito di uno stile M. All' altra estremità R della riga è fissato un filo così che passa per l'anello ed è fissato in F_1. Mentre la riga ruota intorno ad F lo stile descrive la iperbola.



Corollario. *Data la direttrice, la direzione di un asymptoto, ed un fuoco di una iperbola descriverla per moto continuo.*



Si prenda la squadra obliqua CBA tale che chiuda l'angolo CBA eguale a quello che la direzione del dato asymptoto forma colla direttrice DD'. Un filo ha una sua estremità fissa nel fuoco F e l'altra all'estremità C della squadra e passa afferrato in un anello munito di stile M che è fisso alla squadra. Scorrendo questa lungo la direttrice, lo stile M descrive la iperbola.

Problema III. *Descrivere la iperbola allorchè sono dati gli asymptoti ed un punto su di essa.*

Siano CT, CS gli asymptoti, ed M il punto della curva. Una trasversale qualunque per questo condotta li intersechi nei punti N, N′, il punto M per cui NM=N′M′ appartiene alla iperbola. Così tirando altre trasversali o per M o per qualunque altro punto della curva si possono determinare tanti punti quanti sono necessari affinchè insieme congiunti formino una linea continua.



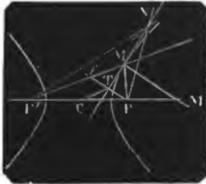
Corollario I. *Descrivere la iperbola conoscendone un asymptoto e tre punti.* Siano CT l'asymptoto, M, M′, M″ i tre punti: tirata la secante MM′ segnato il punto N in cui è incontrata da CT, si prenda M′N′=MN, il punto N′ appartiene al secondo asymptoto. Operando in simil modo per la secante MM″ si ottiene un nuovo punto del secondo asymptoto; di modo che questo essendo pienamente determinato a descrivere la iperbola si adopera il metodo precedente.

Corollario II. *Determinare gli assi della iperbola conoscendone gli asymptoti ed un punto.* Gli assi in direzione coincidono colle bissettrici degli angoli chiusi dagli asymptoti. La lunghezza di uno dei semi-assi si ha conducendo dal punto dato M della curva una perpendicolare *aMb* sulla direzione dell'altro asse, e quindi prendendo una media proporzionale fra i segmenti *a*M, *b*M di questa perpendicolare compresi fra M ed i punti *a*, *b* in cui sega gli asymptoti.

Problema IV. *Descrivere la iperbola conoscendone in grandezza e posizione due diametri conjugati.* Questo problema si risolve come il precedente. Infatti le diagonali del parallelogrammo costruito sui diametri conjugati coincidono cogli asymptoti: conoscendo inoltre due punti della curva, le estremità del diametro-coniugato reale, o si può immediatamente descriverla, o possono essere in grandezza e posizione determinati i suoi assi. A costruire gli assi può essere adoperato il metodo esposto al (n.° 70) per la ellisse,

determinando però il punto M per modo che giaccia dalla medesima parte di O relativamente ad a, e sussista la relazione $Oa \times aM = Ob^2$.

Problema V, *Condurre la tangente in un punto M di una iperbola i cui assi sono dati in grandezza e posizione.*

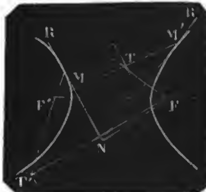


Determinati i fuochi F, F', condotti i raggi vettori MF, MF' si tagli sul maggiore di questi MF' un segmento M*f* coll'origine in M eguale all'altro raggio MF: la perpendicolare MT abbassata da M sulla congiungente F*f* è la tangente alla curva.

Corollario I. *Condurre una normale in un punto M di una data iperbola.* Avendo prolungato il raggio vettore MF' di una lunghezza M*f'* eguale all'altro raggio vettore MF, la perpendicolare tirata da M sulla congiungente F*f'* è la dimandata normale.

Corollario II. *Condurre una tangente in un punto M di una iperbola di cui sono dati gli asymptoti.* Tirata per M una parallela ad uno degli asymptoti CT e prolungata fino che tagli l'altro CT' in *t*, si prenda su questo da C il segmento C*k* doppio di C*t* e si conduca la *k*M. Questa è la tangente in M poichè il segmento compreso fra gli asymptoti è in tal punto bisecato.

Problema VI. *Condurre le tangenti da un punto esterno alla iperbola i cui assi sono dati in grandezza o posizione.*



Metodo I. Sia N il punto dato; determinati i fuochi F, F', ponendo il centro in F con raggio eguale a FN si descriva un arco di circonferenza; quindi prendendo F' per centro con un raggio eguale all'asse trasverso AA' si descriva un altro arco di circonferenza il

quale intersechi il primo nei punti T, T': tirate le congiungenti FT, FT' le perpendicolari NR, NR' abbassate su queste da N sono le richieste tangenti.

Metodo II. Sia P il punto esterno: descritta la circonferenza sopra l'asse trasverso $AA'=2a$ come diametro, si elevi da A la perpendicolare a questo AT eguale in lunghezza al semi-asse immaginario $CB=b$, e si abbassi da P la ordinata PQ; quindi preso sopra AA' da A come origine il segmento $AO=PQ$ si tiri la retta TO, e parallelamente a questa da Q la QG la quale incontri nei punti G, g la circonferenza AGA'. I piedi R, r delle ordinate GR, gr congiunti con P determinano le rette RP, rP le quali sono tangenti alla iperbola.

Infatti posto $PQ=y_0$, $CQ=x_0$, $gr=y_1$, $Cr=x_1$, determinato x_1 per le relazioni $y_1^2+x_1^2=a^2$, $y_1:b::x_0+x_1:y_0$, la equazione della retta che congiunge i punti P, g è identica con quella della tangente alla iperbola menata per P (n.° 63).

Problema VII. *Condurre parallelamente con una data retta SR le tangenti ad una iperbola della quale sono dati gli assi in grandezza e posizione.*

Determinati i fuochi F', F da uno F di questi si abbassi la perpendicolare FN sulla retta RS, e ponendo il centro nell'altro fuoco F' con raggio eguale all'asse trasverso $2a$ si descriva un arco di circonferenza che seghi tal perpendicolare in N, n. Le perpendicolari elevate sulle congiungenti F'N,

Fn nei loro punti di mezzo sono le tangenti alla iperbola parallele ad RS, ed i punti in cui sono intersecate dalle F'N, $F'n$ sono i punti di tangenza.

III. Parabola

72. Problema I. *Trovare l'equazione della tangente alla parabola riferita al vertice ed all'asse*

$$(1)\qquad y^2=4px,$$

dato il punto di tangenza (x_1y_1)

La corda che congiunge i due punti (x_1y_1), (x_2y_2) presi sulla curva, e pei quali hanno luogo le relazioni $y_1^2=4px_1$, $y_2^2=4px_2$ ovvero la

$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{4p}{y_1+y_2}$ ha per equazione $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{4p}{y_1+y_2}$, od

$$y(y_1+y_2)-4px-y_1y_2=0.$$

Laonde l'equazione della tangente che da essa si trae ponendo $x_2=x_1$, $y_2=y_1$, è

$$(2)\qquad yy_1-2p(x+x_1)=0.$$

Corollario I. Il punto in cui questa interseca l'asse ha per coordinate $y=0$, $x=-x_1$. Pertanto la sutangente (n.° 64) ha per espressione $S_t=2x_1$ ed è bisecata nel vertice della curva: e la lunghezza della tangente è $T=2\sqrt{x_1(p+x_1)}$.

Corollario II. L'equazione della polare del punto (x_1y_1) relativamente alla parabola (1) è della stessa forma di quella della tangente $yy_1-2p(x+x_1)=0$; cosicchè essa incontra l'asse nel punto ($y=0$, $x=-x_1$) Laonde si può enunciare il Teorema: ***il segmento che le polari di due punti qualunque determinano sull'asse equa-***

glia quello che è compreso fra i piedi delle ordinate dei punti considerati.

PROBLEMA II. *Trovare l'equazione delle tangenti condotte da un punto esterno* $(x_1 y_1)$ *alla parabola* (1).

Adoperando il metodo sviluppato nel n.° 61 si trova:

(3) $$\left(yy_1-2p(x+x_1)\right)^2=(y_1^2-4px_1)(y^2-4px).$$

COROLLARIO I. *Trovare l'equazione della tangente condotta alla parabola* (1) *parallelamente alla retta*

(4) $$y=mx+n.$$

Operando come nel n.° 63 si ottiene l'equazione:

(5) $$m(y-mx)=p.$$

PROBLEMA III. *Trovare l' equazione della normale alla parabola* (1) *condotta per il punto* $x_1 y_1$ *preso sul suo perimetro.*

Essendo la normale la perpendicolare alla tangente nel punto di contatto $x_1 y_1$ è espressa per

(6) $$\frac{y-y_1}{x-x_1}=-\frac{y_1}{2p} \text{ ovvero da } 2p(y-y_1)+y_1(x-x_1)=0.$$

COROLLARIO I. La sunormale e la normale sono espresse dalle formole

$$S_n=2p,\quad N=\sqrt{(y_1^2+4p^2)}=2\sqrt{p(x_1+p)}.$$

Pertanto *nella parabola la sunormale è costante ed eguaglia il semiparametro.*

PROBLEMA. IV. *Condurre le normali alla parabola* (1) *per il punto esterno* $x_1 y_1$.

Indicando con XY le coordinate del punto in cui la normale

incontra la curva, la sua equazione è

$$2p(y-Y)+Y(x-X)=0:$$

e siccome il punto x_1y_1 giace su questa, così sussiste l' equazione di condizione

$$2p(y_1-Y)+Y(x_1-X)=0, \text{ ovvero } XY+Y(2p-x_1)-2py_1=0$$

Di guisa chè i punti della parabola le cui normali passano per x_1y_1 sono le intersezioni delle curve:

$$XY+Y(2p-x_1)-2py_1=0 \quad Y^2=4pX,$$

delle quali la prima è una iperbola equilatera avente per asymptoti le rette $y=0$, $X=x_1-2p$, la seconda la parabola. Dalla posizione della iperbola si deduce che il numero delle intersezioni non può mai superare tre.

73. **Problema** I. *Determinare la lunghezza del raggio vettore condotto dal fuoco ad un punto della parabola*

$$(1) \qquad y^2=4px.$$

Essendo ($x=p$, $y=0$) le coordinate di un punto preso sull'asse della curva e nominato fuoco, ed x_1y_1 un punto qualunque del suo perimetro, il quadrato della lunghezza del raggio vettore è

$$\rho^2=(x_1-p)^2+y_1^2=(p+x_1)^2 \quad \text{ovvero}$$

$$(2) \qquad \rho=p+x_1.$$

Corollario I. La polare del fuoco nella parabola è la direttrice la cui equazione essendo $x+p=0$ è paralella alla tangente al vertice. La distanza di un punto qualunque della curva (x_1y_1)

da questa è x_1+p e perciò *la distanza di un punto della curva dalla direttrice eguaglia la sua distanza dal fuoco.*

Corollario II. *Condotta alla parabola una tangente qualunque per il punto di contatto* M ($x_1 y_1$), *e determinato il punto* N($y=0$, $x=-x_1$) *in cui essa taglia l'asse, il fuoco* F *è equidistante dai due punti* M *ed* N. Infatti abbiamo $FM=p+x_1=MN$.

Corollario III. *Una tangente qualunque* MN *alla parabola forma angoli eguali coll'asse e col raggio vettore* FM *condotto per il punto di tangenza* M. Ciò immediatamente deriva dal triangolo FMN, (N punto in cui la tangente incontra l'asse), che è un triangolo isoscele. La tangente nel punto della curva ($y=0$, $x=p$), a cui corrisponde l'ordinata focale forma coll'asse un angolo di 45.°

Inoltre si consideri il diametro che ha in $M(x_1 y_1)$ la sua estremità e perciò dato dall' equazione $y=y_1$, e si trasportino gli assi coordinati parallelamente a se stessi in un suo punto qualunque P($y=y_1$, $x=\alpha$) per mezzo delle formule di trasformazione $y=Y+y_1$, $x=X+\alpha$. l'equazione della parabola diviene

$$Y^2+2Yy_1-4pX+y_1^2-4p\alpha=0.$$

La retta $X=m\rho$, $Y=n\rho$ è bisecata in P se ha luogo la relazione $ny_1-2pm=0$, da cui si trae $\frac{n}{m}=\frac{2p}{y_1}$ ed $Y=\frac{2p}{y_1}X$. Ritornando agli assi primitivi la retta $(y-y_1)=\frac{2p}{y_1}(x-\alpha)$ essendo bisecata dal diametro $y=y_1$, qualunque α, esprime una corda qualunque che gli corrisponde ed essendo parallela alla tangente in M, abbiamo il Teorema: *che la tangente alla parabola è parallela al sistema di corde bisecate dal diametro che passa per il suo punto di tangenza.*

Corollario IV. *L' angolo compreso fra due tangenti qualunque eguaglia la metà dell' angolo compreso fra i raggi vettori dei loro punti di contatto.*

Siano MN, M'N' le due tangenti, M, M' designando i punti

di contatto, con N,N′ quelli in cui tagliano l'asse, P il loro punto di intersezione, AA′ l'asse ed F il fuoco, abbiamo

$$FNM=\frac{1}{2}MFA',\ FN'M'=\frac{1}{2}M'FA',\ \text{ed}\ NPN'=M'N'F-MNF$$

$$=\frac{1}{2}\left(M'FA'-MFA'\right)=\frac{1}{2}M'FM.$$

Problema II. *Avendo la parabola riferita all'asse ed al vertice* $y^2=4px$, *trasformarla prendendo per nuovi assi un suo diametro qualunque e la tangente nel punto* (x_1, y_1) *in cui questo taglia la curva.*

In prima si trasportino parallelamente gli assi nella nuova origine (x_1, y_1). Le formule di trasformazione essendo $y=Y'+y_1$, $x=X'+x_1$, in cui fra x_1, y_1 sussiste la relazione $y_1^2=4px_1$, la equazione (1) diviene

$$Y'^2+2Y'y_1-4X'p=0.$$

Ritenendo invariata la posizione del nuovo asse delle X′, si prenda per asse delle Y′ la tangente alla curva nella origine; perciò indicando con θ l'angolo che gli assi delle Y e delle X comprendono per le formule di trasformazione, $X'=X+Y\cos\theta$, $Y'=Y\,sen\,\theta$, abbiamo

$$Y^2 sen^2\theta+2Y(y_1 sen\theta-2p\cos\theta)-4pX=0,\ \text{ovvero}\ Y^2 sen^2\theta-4pX=0,$$

avendo luogo la condizione

$$y_1\,sen\,\theta-2p\cos\theta=0\quad\text{o}\quad tang\,\theta=\frac{2p}{y_1}.$$

Posto

(3) $$p'=\frac{p}{sen^2\theta},\ \text{ove}$$

(4) $$sen\,\theta=\frac{2p}{\sqrt{y_1^2+4p^2}}=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p+x_1}}\quad\text{e}$$

(5) $$p'=p+x_1$$

l'equazione trasformata della parabola è

(6) $$Y^2=4p'X.$$

Corollario I. La quantità $4p'$ è nominata il *parametro che corrisponde al diametro* $y=y_1$, e dalla espressione (3) si può dedurre il Teorema: *il parametro relativo ad un diametro qualunque sta al parametro principale, inversamente come il quadrato del seno dell'angolo che le ordinate o corde formano coll'asse stà ad uno.*

Corollario II. L'equazione della tangente, il cui punto di contatto è x' y', alla parabola data dall'equazione (6) è

$$Yy'-2p'(X+x')=0.$$

Corollario III. Considerando la tangente e la normale alla parabola (1) nel punto $(x_1 y_1)$, abbiamo

(7) $$S_n=2p,\ S_t=2x_1,\ \text{ed}\ S_n+S_t=2(p+x_1)=2p';$$

quindi *la porzione dell'asse compresa fra la tangente e la normale eguaglia il semi-parametro relativo al diametro che passa per il punto di contatto.*

74. Teorema. *La retta che unisce il fuoco della parabola* (1) *al punto d'intersezione di due tangenti qualunque biseca l'angolo formato dai raggi vettori condotti ai loro punti di contatto.*

Essendo $M(x', y')$ il punto di contatto di una tangente, $M'(x'', y'')$ quello dell'altra, $(x_1 y_1)P$ il loro punto d'intersezione, siano ρ, ρ', ρ'' i raggi vettori FP, FM, FM' e θ, θ', θ'' gli angoli che respettivamente formano coll'asse, abbiamo

$$sen\theta=\frac{y_1}{\rho},\ cos\theta=\frac{p-x_1}{\rho};\ sen\theta'=\frac{y'}{\rho'},\ cos\theta'=\frac{p-x'}{\rho'};\ sen\theta''=\frac{y''}{\rho''},\ cos\theta''=\frac{p-x''}{\rho''}$$

ed

$$\cos(\theta-\theta')=\frac{(p-x_1)(p-x')+y_1y'}{\rho\rho'},\quad \cos(\theta''-\theta)=\frac{(p-x'')(p-x_1)+y_1y''}{\rho\rho''}$$

Ma per

$$\rho'=p+x',\ \rho''=p+x'';\ y_1y'=2p(x_1+x'),\ y_1y''=2p(x_1+x''),$$

si ottiene

$$\cos(\theta-\theta')=\frac{p+x_1}{\rho},\quad \cos(\theta''-\theta)=\frac{p+x_1}{\rho}\ \text{ e quindi } (\theta-\theta')=(\theta''-\theta),$$

il che era da dimostrare.

Corollario I. Se l'angolo MFM' è eguale a 180° la corda MM' passa per il fuoco, e l'angolo MPM' è retto, come parimente è retto l'angolo MFP.

Inoltre le tangenti PM, PM' si tagliano sulla direttrice. Le condizioni affinchè le due tangenti condotte per il punto (x_1, y_1) ed espresse dalla equazione (3) n.° 72 siano scambievolmente perpendicolari è $4p(p+x_1)=0$ ovvero $x_1=-p$: quindi P giace sulla direttrice.

Corollario II. *Se una tangente qualunque alla parabola incontra due tangenti fisse* PMT, PM'T' *nei punti* N, N' *l'angolo* NFN' *è supplementario dell'angolo* MPT' *compreso fra le due tangenti fisse.*

Infatti abbiamo

$$\text{MPT}'=\frac{1}{2}\text{MFM}',\ \text{ed evidentemente}\ \text{NFN}'=\frac{1}{2}\text{MFM}'=\text{MPT}'=180^\circ-\text{MPM}'.$$

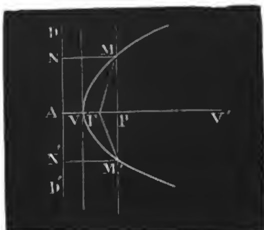
Corollario II. *La circonferenza circoscritta al triangolo formato da tre tangenti qualunque ad una parabola passa per il fuoco.*

Infatti la circonferenza determinata dai tre punti N,P,N' deve passare per F perchè gli angoli NPN', NFN' sono supplementari.

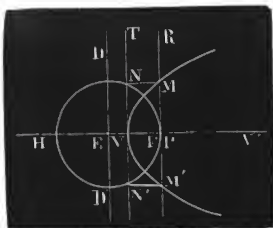
Metodi per descrivere la Parabola e per tracciarne le tangenti.

73. Problema I. *Dato il fuoco e la direttrice di una parabola descriverla per punti*

Metodo I. Sia DD′ la direttrice ed F il fuoco, la perpendicolare FA abbassata da F sopra DD′ è l'asse della curva ed il punto V che biseca il segmento FA ne è il vertice. Da un punto qualunque P dell'asse si elevi una parallela indefinita a DD′, e ponendo il centro in F e con un raggio eguale alla distanza PA del punto P dal'a direttrice si descriva un arco di circonferenza, i punti M, M′ in cui questo taglia la PM appartengono alla curva. Infatti per essi abbiamo FM=PA=MN; ed FM′=PA=M′N′.



Metodo II. Siano V il vertice della parabola, VV′ l'asse, F il fuoco, DD′ la direttrice, e 2FE il parametro della parabola: preso sopra l'asse un punto qualunque P, e il segmento VH=2FE, si elevi in V una perpendicolare indefinita VT all'asse, e da P una parallela RP a questa, e quindi sopra PH come diametro si descriva una circonferenza la quale tagli la VT nei punti N, N′. Le rette da questi condotte parallelamente all'asse incontrano la PR nei punti M, M′ che appartengono alla curva.



Problema II. *Dato il fuoco e la direttrice di una parabola decriverla per moto continuo*

Siano DD′ la direttrice ed F il fuoco, e sia da tracciare un arco di parabola compreso fra questa ed una sua parallela LN: presa una squadra ABC di cui uno dei cateti AC abbia una lunghezza eguale alla distanza V′E che intercede fra le parallele LN e DD′, ed un filo della stessa lunghezza V′E che abbia una delle sue estremità fissa nel fuoco F e l'altra nel vertice C della squadra, questa si faccia per il suo cateto AB scorrere lungo una riga disposta sulla direttrice. Uno stile il quale durante il movimento della squadra tiene il filo teso ed appoggiato sul cateto AC descrive la curva. Infatti essendo MF+MC=AC, abbiamo MF=MA.



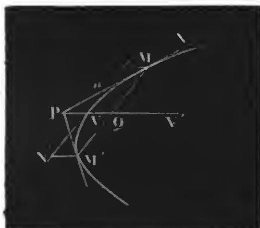
Problema III. *Dato un diametro della parabola, il parametro a questo relativo, e la tangente nella sua estremità, descrivere la curva.*

Siano TNN′ il diametro, $4p'$ il parametro, RTT′ la tangente e T il punto di contatto, si tracci la parabola che abbia per asse il diametro NN′, per parametro principale $4p'$, ed il vertice in T, quindi se ne inclinino le ordinate dell'angolo dato RTN′ conservando invariata la loro lunghezza, la curva che in questo modo si descrive è la parabola richiesta.

Corollario. *Determinare il fuoco e la direttrice di tale parabola.* Si conduca in T la retta TK la quale formi colla data tangente l'angolo T′TK=RTN, e su di essa si prenda un segmento TF eguale a p', il punto F è il fuoco: sul prolungamento di TN′ da T si prenda la lunghezza TN′=TF, a da N′ si elevi la perpendicolare ED′ al diametro NTN′, questa è la direttrice.

Problema IV. *Date due tangenti ed i loro punti di contatto descrivere la parabola per punti*

Siano PM, PM' le due tangenti, M ed M' i loro punti di contatto, MM' la corda che li congiunge e sia P il loro punto d'intersezione: congiunto il punto di mezzo Q di MM' con P mediante la PQ, da V' punto di mezzo di PQ si conduca una parallela alla corda MM', questa è una terza tangente alla parabola il cui punto di tangenza è V. Combinandola successivamente con ciascuna delle tangenti date si determinano due altre tangenti coi loro punti di contatto e così si hanno tanti punti della curva quanti sono necessari per descriverla.



Lemma. *Le tre perpendicolari del triangolo formato da tre tangenti alla parabola s' intersecano sulle direttrice.*

Essendo

$$yy_1-2p(x+x_1)=0,\ yy_2-2p(x+x_2)=0,\ yy_3-2p(x+x_3)=0$$

le equazioni delle tangenti, le perpendicolari del triangolo da esse costituito sono rappresentate dalle

$$4py_1(x+p)-y_1y_2y_3+8p^2y-4p^2(y_1+y_2+y_3)=0$$
$$4py_2(x+p)-y_1y_2y_3+8p^2y-4p^2(y_1+y_2+y_3)=0$$
$$4py_3(x+p)-y_1y_2y_3+8p^2y-4p^2(y_1+y_2+y_3)=0.$$

le quali sono soddisfatte dalle coordinate:

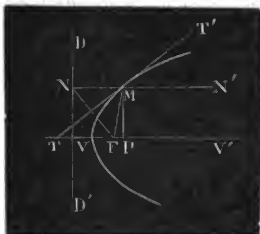
$$x=-p,\ y=\frac{y_1y_2y_3}{8p^2}+\frac{y_1+y_2+y_3}{2}$$

che denotano un punto giacente sulla direttrice.

Problema V. *Date quattro rette costruire la parabola ad esse tangente.*

Indicato con A, B, C, D le rette date, con *a, b, c; a, e, d; b, e, g; c, d, g* i punti d'intersezione di ciascuna di esse colle tre rimanenti, ai triangoli *abe, edg, acd, cbg* si circoscrivano circonferenze, e in essi si determinino i punti G_1, G_2, G_3, G_4 secondo cui respettivamente si tagliano le loro altezze: le quattro circonferenze passano per un unico punto *f*, fuoco della parabola richiesta, e tali punti giacciono tutti sopra una medesima retta che ne è la direttrice. Quindi si descrive la Parabola, avente il fuoco in *f* e la retta G_1G_2 per direttrice col metodo esposto nel Problema I.

Problema VI. *Condurre la tangente in un punto* M *di una parabola di cui sono dati il fuoco e la direttrice.*



Metodo I Essendo F il fuoco, DD' la direttrice, VV' l'asse V il vertice della parabola, P il piede della ordinata di M, preso sull'asse il segmento VT =VP, la retta TMM' è la dimandata tangente (n.° 72 Problema I, Corollario I).

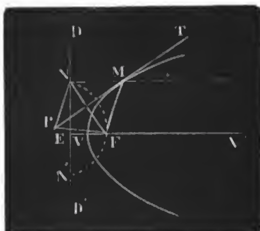
Metodo II. Condotte da M la perpendicolare NMN' sulla direttrice DD', (N punto in cui la taglia), e la congiungente NF, la normale TMT' su questa abbassata da M è la tangente.

Corollario I. *Condurre la tangente in un punto* M *di una parabola della quale sono dati un diametro* PP' *e la tangente* RR' *nella sua estremità* P. Essendo N il piede dell'ordinata a PP' condotta da M parallelamente alla tangente RR', preso sul diametro il segmento PT=PN, la retta MT è la tangente

Corollario II. *Condurre la normale in un punto* M *della parabola di cui sono dati il fuoco e la direttrice.* Condotto da M il raggio focale ME e la perpendicolare N'MN alla direttrice, la nor-

male è la bisettrice dell'angolo FMN'.

PROBLEMA VII. *Condurre le tangenti da un punto esterno alla parabola della quale sono dati il fuoco e la direttrice.*



Essendo DD' la direttrice, F il fuoco, V il vertice, EVV' l'asse della parabola, P il punto dato, ponendo in P il centro con raggio PF si descriva l'arco di circonferenza NFN' il quale seghi la DD' nei punti N,N', le perpendicolari abbassate da P sulle corde FN,FN' sono tangenti alla curva.

Infatti indicando con M il punto in cui una di esse PT taglia la curva e condotte le FM, MN, gli angoli FMP, PMN resultano eguali e quindi la PT tangente.

PROBLEMA VIII. *Condurre parallelamente con una data retta le tangenti ad una parabola della quale sono dati il fuoco e la direttrice.*



Essendo F il fuoco, DD' la direttrice della parabola, RS la retta data, condotto a questa la perpendicolare FN', e nel punto di mezzo *m* di FN, (N punto in cui essa taglia la DD') la perpendicolare *m*MT, questa resulta la tangente dimandata.

IV. SIMILITUDINE DELLE CURVE DI SECONDO ORDINE

76. LEMMA. *Se due poligoni sono simili, le rette congiungenti i loro vertici omologhi passano per il medesimo punto.*

I due poligoni simili ABCDEF..., *abcdef*... denotando colla stes-

sa lettera i vertici degli angoli eguali e con $m:n$ il rapporto costante dei lati danno le

$$AB:ab::BD:bc::CD:cd::DE:de::EF:ef::\ldots::m:n$$

Ma chiamato O il punto d'intersezione delle rette Aa, Bb; O' quello delle rette Bb, Cc; O'' quello delle rette Cc, Dd, ... dai triangoli simili ABO, abO; BCO', bcO'; CDO'', cdO'', ... si traggono immediatamente le relazioni

$$\frac{m}{n}=\frac{AO}{aO}=\frac{BO}{bO},\ \frac{m}{n}=\frac{BO'}{bO'}=\frac{CO'}{cO'},\ \frac{m}{n}=\frac{CO''}{cO''}=\frac{DO''}{dO''}$$

laonde i punti O, O', O'', ... coincidono in un solo

Corollario I. Da un punto qualunque P condotte le rette PA, PB, PC, PD; ... ai vertici del poligono ABCDEF... , e preso p in modo che giaccia sulla retta OP e sia omologo a P, (la retta ap resulti parallela ad AP), pei triangoli simili ABP, abp; BCP, bcp; ... resultano le relazioni:

$$m:n::AP:ap::BP:bp::CP:cp\ldots$$

Corollario II. Se il punto d'intersezione delle rette o raggi vettori Aa, Bb, Cc, ... è esterno relativamente a due poligoni *questi sono detti simili e similmente posti* ed il punto O è chiamato *centro esterno di similitudine.*

Se il punto in cui concorrono i raggi vettori Aa, Bb, è compreso frai due poligoni, questi sono chiamati *inversamente simili* ed il punto O *centro interno di similitudine.*

77. *Due linee qualunque diconsi* simili e similmente poste *se i raggi vettori condotti alla prima da un punto* O *sono proporzionali ai raggi con quelli paralelli e nella stessa direzione tirati alla seconda linea da un altro punto* O'. *Esse diconsi* simili ed inversamente poste *se i raggi vettori tirati da* O *alla prima sono proporzionali ai raggi paralelli e in opposta direzione che da* O' *vanno*

all' altra curva. Indicando con k il rapporto costante di due raggi omologhi il suo valore è compreso fra 0 e $+\infty$ per la similitudine diretta, e fra 0 e $-\infty$ per la similitudine inversa.

PROBLEMA I. *Avendo l' equazione generale delle linee di secondo ordine*

$$(1)\qquad f(x,y)=Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

determinare quella delle curve simili con esse e poste similmente od inversamente.

Indicando con O il centro di similitudine delle prime, preso per origine degli assi coordinati, con O′ ($x=a$, $y=b$) il centro di similitudine delle altre con M(x,y) e M′(X,Y) due punti respettivamente omologhi, con k un numero qualunque, dalla definizione della similitudine si deduce:

$$\frac{OM}{O'M'}=\frac{x}{X-a}=\frac{y}{Y-b}=k \quad \text{ovvero} \quad x=k(X-a),\ y=k(Y-b).$$

Laonde l'equazione delle curve simili e similmente od inversamente poste ha la forma $f\Big(k(X-a),\ k(Y-b)\Big)=0$, ovvero

$$(2)\ \varphi(x,y)=k^2(Ay^2+Bxy+Cx^2)+kf'_y(-ka,\ -kb)+kf'_x(-ka,\ -kb)$$
$$+f(-ka,\ -kb)=0.$$

COROLLARIO I. *Determinare le condizioni affinchè le due curve di secondo grado:* $f(x,y)=0$

$$(3)\qquad f_1(x,y)=ax^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0$$

siano simili e similmente od inversamente poste.

Dovendo le equazioni (2), (3) essere identiche sussistono le cinque equazioni di condizione:

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{f'_y(-ka,\ -kb)}{kd}=\frac{f'_x(-ka,\ -kb)}{ke}=\frac{f(-ka,\ -kb)}{k^2f}$$

Mediante le ultime tre si determinano le quantità arbitrarie a, b, k sempre reali; quindi le condizioni che debbono aver luogo sono $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$.

Corollario II. Denotando con λ il rapporto costante delle quantità A, a; B, b; C, c immediatamente abbiamo

$$M = 4AC - B^2 = \lambda^2(4ac - b^2) = \lambda^2 m$$
$$\delta = A + C - B\cos\theta = \lambda(a + c - b\cos\theta) = \lambda\delta',$$

quindi, n.° 51*, per la espressione

$$R_1 = \sqrt{\delta^2 - M sen^2\theta} = \lambda\sqrt{\delta'^2 - m^2 sen^2\theta} = \lambda R'_1$$

ne derivano le

$$\pm b^2 = \frac{2\Delta}{M^2}(\delta - R_1) = \frac{2\Delta}{\lambda m^2}(\delta' - R_1') = \pm b'^2 . \frac{\Delta}{\lambda\,\Delta'}$$
$$\pm a^2 = \frac{2\Delta}{M^2}(\delta + R_1) = \frac{2\Delta}{\lambda m^2}(\delta' + R'_1) = \pm a'^2 . \frac{\Delta}{\lambda\,\Delta'}.$$

Da queste formule si ricavano i Teoremi

I. *Due curve di secondo ordine sono simili e similmente od inversamente poste quando hanno i coefficienti dei termini di secondo grado nelle variabili eguali o diversi solo per un fattore costante.*

II. *Due parabole simili e similmente od inversamente poste hanno gli assi paralleli,* n°. 48, *hanno proporzionali e il parametro principale e i parametri relativi a diametri paralleli* n.° 53.

III. *Due ellissi od iperbole simili e similmente od inversamente poste hanno gli assi proporzionali, e parimente proporzionali i diametri conjugati paralleli*, n.° 50: *hanno pure paralleli gli asymptoti.*

Corollario III. Questi Teoremi si ottengono immediatamente prendendo la equazione della prima curva e riferita al centro ed agli assi ovvero al vertice ed all' asse.

Due figure sono simili ma non similmente od inversamente po-

ste se i raggi vettori omologhi formano fra loro un angolo costante.

PROBLEMA II. *Determinare la condizione affinchè le due curve di secondo ordine:*

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0\,,\quad ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0$$

siano simili ma non similmente poste, gli assi coordinati comprendendo l' angolo qualunque Θ.

È evidente che se una delle due figure ruota dell'angolo costante chiuso dai raggi vettori omologhi, essa diviene simile e similmente posta relativamente alla seconda, e quindi hanno luogo le condizioni $A':a=B':b=C':c=\lambda$. Ma le quantità $\dfrac{B^2-4AC}{sen^2\Theta}$, $A+C-B\cos\Theta$ rimangono invariabili per tale rotazione: pertanto dobbiamo avere le condizioni

$$B^2-4AC=\lambda^2(b^2-4ac)\,,\quad A+C-B\cos\Theta=\lambda(a+c-b\cos\Theta)$$

nelle quali λ è una costante arbitraria. Eliminandola si ottiene per la richiesta condizione

$$(1)\qquad \frac{B^2-4AC}{(A+C-B\cos\Theta)^2}=\frac{b^2-4ac}{(a+c-b\cos\Theta)^2}.$$

COROLLARIO. Le due curve di secondo grado se sono parabole, od iperbole equilatere sono simili, la condizione (1) divenendo in ambedue i casi una identità.

V.° PROPRIETA' ARMONICHE ED ANARMONICHE DELLE CURVE DI SECONDO ORDINE.

78. *Dati quattro punti* a, b, c, d *situati in linea retta il rapporto delle distanze di uno di questi* a *a due altri* c, d, $\dfrac{ac}{ad}$ *diviso per il rapporto delle distanze del quarto punto* b *ai medesimi punti*

c, d, $\frac{bc}{bd}$ *nominasi* funzione o rapporto anarmonico dei quattro punti.

Quando questo eguaglia -1 *prende il nome* di rapporto armonico.

Il segno del rapporto anarmonico si determina applicando ai segmenti che lo costituiscono la regola generale dei segni.

Date quattro rette A, B, C, D *poste in un medesimo piano e che passino per lo stesso punto* O, *la espressione* $\frac{sen(A,C)}{sen(A,D)}:\frac{sen(B,C)}{sen(B,D)}$ *frai seni di quattro dei sei angoli che comprendono due a due, nominasi* funzione o rapporto anarmonico delle quattro rette. *Se questo eguaglia* -1, *diviene* il rapporto armonico.

Se il fascio delle quattro rette A, B, C, D concorrenti in O è tagliato da una trasversale qualunque nei punti a, b, c, d, dai triangoli che ne resultano immediatamente si trae

$$\frac{sen(A,C)}{sen(A,D)}:\frac{sen(B,C)}{sen(B,D)}=\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}$$

dimodochè al rapporto anarmonico delle quattro rette si può sostituire quello dei quattro punti secondo cui esse sono tagliate dalla trasversale.

Problema I. *Determinare la condizione necessaria e sufficiente affinchè le quattro rette* OA, OD, OB, OC, *formino un rapporto anarmonico* λ.

Rappresentando con

$$U=Ay+Bx+C=0\,,\quad U_1=A_1y+B_1x+C_1=0$$

le equazioni di due rette qualunque OL, OM fisse e concorrenti in O e che comprendano l'angolo Θ l'equazioni delle rette OA, OB, OC, OD sono, n.° 36,

$$U-\rho_1U_1=0,\ U-\rho_2U_1=0,\ U-\rho_3U_1=0,\ U-\rho_4U_1=0.$$

La espressione $\frac{senAOC}{senAOD}:\frac{senBOC}{senBOD}=\lambda$, per AOC=COL—AOL

$BOC = COL - BOL$, $AOD = DOL - AOL$, $BOD = DOL - BOL$

diviene

$$\lambda = \frac{(sen COL \cos AOL - \cos COL sen AOL)(sen DOL \cos BOL - \cos DOL sen BOL)}{(sen DOL \cos AOL - \cos DOL sen AOL)(sen COL \cos BOL - \cos COL sen BOL)}$$

ovvero

$$\lambda = \frac{(tang COL - tang AOL)(tang DOL - tang BOL)}{(tang DOL - tang AOL)(tang COL - tang BOL)}.$$

Ma riguardando le rette fisse OL, OM come gli assi coordinati ai quali le rette date sono riferite abbiamo

$$tang AOL = \frac{\rho_1 sen \Theta}{1 + \rho_1 \cos \Theta}, \quad tang BOL = \frac{\rho_2 sen \Theta}{1 + \rho_2 \cos \Theta}, \quad tang COL = \frac{\rho_3 sen \Theta}{1 + \rho_3 \cos \Theta},$$

$$tang DOL = \frac{\rho_4 sen \Theta}{1 + \rho_4 \cos \Theta}:$$

per conseguenza la precedente espressione del rapporto anarmonico si trasforma nella

$$(1) \qquad \lambda = \frac{(\rho_3 - \rho_1)(\rho_4 - \rho_2)}{(\rho_3 - \rho_2)(\rho_4 - \rho_1)}$$

Corollario I. Se $\rho_3 = 0$, $\rho_4 = \infty$, le rette che formano il fascio dato sono rappresentate da $U - \rho_1 U_1 = 0$, $U - \rho_2 U_1 = 0$, $U = 0$, $U_1 = 0$ ed hanno per rapporto anarmonico

$$(2) \qquad \lambda = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Corollario Se $\lambda = -1$, le quattro rette formano un fascio armonico; in questo caso la (1) si cambia nella

$$(3) \qquad 2(\rho_1 \rho_2 + \rho_3 \rho_4) - (\rho_1 + \rho_2)(\rho_3 + \rho_4) = 0$$

e la (2) nella

$$(4) \qquad \rho_1 + \rho_2 = 0$$

Le rette C, D sono dette *conjugate armoniche delle rette* A, B.

Se tre sistemi di due punti che si corrispondono o sono conjugati, posti sopra una retta, godono della proprietà che quattro di essi presi nei tre sistemi abbiano il loro rapporto anarmonico eguale a quello dei quattro punti che gli sono conjugati, diconsi formare una involuzione.

Sei rette condotte da un medesimo punto e conjugate due a due sono in involuzione e *perciò formano un fascio in involuzione se quattro di esse prese in tre coppie hanno il rapporto anarmonico eguale a quello delle quattro rette che le sono conjugate.* È evidente come un tal fascio sia tagliato da una trasversale qualunque in sei punti in involuzione.

Problema II. *Determinare la condizione affinchè le rette* OA, OB; OC, OD; OE, OF, *conjugate due a due fo mino un fascio in involuzione.*

Rappresentando con

$$U-\rho_1U_1=0\,,\ U-\rho_2U_1=0\,;\ U-\sigma_1U_1=0\,,\ U-\sigma_2U_1=0\,;$$
$$U-\pi_1U_1=0,\ U-\pi_2U_1=0$$

le rette date, per definizione, il rapporto anarmonico delle

$$U-\rho_1U_1=0,\ U-\sigma_1U_1=0,\ U-\pi_1U_1=0,\ U-\rho_2U_1=0$$

dovendo eguagliare quello delle loro conjugate

$$U-\rho_2U_1=0,\ U-\sigma_2U_1=0,\ U-\pi_2U_1=0,\ U-\rho_1U_1=0$$

si ottiene per esprimere la involuzione la

$$(5)\qquad \frac{(\pi_1-\rho_1)(\rho_2-\sigma_1)}{(\pi_1-\sigma_1)(\rho_2-\rho_1)}=\frac{(\pi_2-\rho_2)(\rho_1-\sigma_2)}{(\pi_2-\sigma_2)(\rho_1-\rho_2)}\text{ , ovvero la}$$

$$(6)\ (\rho_1+\rho_2)(\sigma_1\sigma_2-\pi_1\pi_2)+(\sigma_1+\sigma_2)(\pi_1\pi_2-\rho_1\rho_2)+(\pi_1+\pi_2)(\rho_1\rho_2-\sigma_1\sigma_2)=0.$$

Corollario Se $\rho_1=0$, $\rho_2=\infty$, la (6) si riduce a (7)$\pi_1\pi_2-\rho_1\rho_2=0$.

Teorema I. *Data una curva di secondo ordine e quattro punti fissi presi sul suo perimetro il rapporto anarmonico del fascio*

che ha il suo centro sulla curva ed ha per raggi le corde che lo uniscono coi punti fissi è costante.

Siano A, B, C, D i punti fissi, $u_1=0$, $u_2=0$, $u_3=0$ le equazioni delle rette AB, AC, BC, e perciò le $u_1u_2^0-u_3u_1^0=0$, $u_2u_3^0-u_3u_2^0=0$ (in cui u_1^0, u_2^0, u_3^0 esprimono i resultati della sostituzione in u_1, u_2, u_3 delle coordinate di D) quelle di BD, CD, le curve di secondo ordine circoscritte al quadrilatero dato sono rappresentate da $u(u_2u_3^0-u_3u_2^0)-\lambda\ u_2(u_1u_3^0-u_3u_1^0)=0$
λ essendo una costante arbitraria.

Le rette che congiungono i punti fissi con un punto O della curva sono espresse per

$$u_3\alpha-u_1\gamma=0,\ u_2\gamma-u_3\beta=0,\ u_1\beta-u_2\alpha=0,$$
$$u_1(u_2^0\gamma-\beta u_3^0)-u_2(u_1^0\gamma-u_3^0\alpha)+u_3(u_1^0\beta-u_2^0\alpha)=0:$$

poichè addizionatele dopo avere moltiplicato la prima per u_2^0, la seconda per u_1^0, la terza per u_3^0 e l' ultima per 1 si ottiene una somma identicamente nulla

Considerando ora il fascio che ha il suo centro nel punto fisso A e per raggi le rette che da questo vanno respettivamente ai punti ove i raggi del fascio in O tagliano la trasversale BC, $u_3=0$, fascio che ha il medesimo rapporto anarmonico del primo, si ottengono le

$$u_1\beta-u_2\alpha=0,\ u_1=0,\ u_2=0,\ u_1(u_2^0\gamma-u_3^0\beta)-u_2(u_1^0\gamma-u_3^0\alpha)=0:$$

per conseguenza il loro rapporto anarmonico è espresso da
$\frac{\alpha}{\beta}:\frac{u_1^0\gamma-u_3^0\alpha}{u_1^0\gamma-u_3^0\beta}=\lambda$, in quanto chè onde il punto O sia sulla curva deve sussistere la condizione $\frac{\gamma u_1^0-\alpha u_3^0}{\gamma u_2^0-\beta u_3^0}=\frac{\alpha}{\lambda\beta}$.

Corollario I. Siano A, B, C, D, E, F i vertici di un esagono inscritto in una curva di secondo grado, i fasci EB, EC, ED, EF AB, AC, AD, AF hanno i rapporti anarmonici eguali; per la quale proprietà sono detti *omografici*. Notando con *d*, *f* i punti in cui i

raggi ED, EF tagliano la trasversale BC e con a, b quelli in cui i raggi AF, AB segano la DC, le serie dei quattro punti C, d, f, B; C, b, a, D, la prima giacente sopra CB, l' altra su DC hanno rapporti anarmonici eguali. Quindi preso il punto G in cui s' intersecano le rette AB, DE come origine, i due fasci GC, Gd, Gf, GB; GC, Gb, Ga, GD sono omografici. Ma questi hanno tre raggi a comune, GC, GdD, GbB: dunque il quarto raggio dell' uno Ga si confonde nella medesima retta col quarto raggio dell'altro fascio Gf. Laonde essendo a il punto d' intersezione delle rette AF, CD ed f quello delle rette FE, BC si ottiene il Teorema di Pascal. *In ogni esagono inscritto in una curva di secondo ordine i lati opposti si tagliano in punti che giacciono sulla medesima retta.*

Corollario II. Avendo un quadrilatero ABCD inscritto in una curva di secondo grado ed una trasversale qualunque la quale tagli la curva nei punti a, a', i lati opposti del quadrilatero AB, CD in b, b' ed i rimanenti BC, DA in c, c' il rapporto anarmonico del fascio Ba, Bb, Ba', Bc eguaglia il rapporto anarmonico del fascio Dc', Da, Db', Da': e per conseguenza le due serie di punti a, a', b, c; a, a', c', b', hanno il medesimo rapporto anarmonico ovvero le tre coppie di punti a, a'; b, c; b' c' sono in involuzione. Quindi si ha il Teorema di Desargues: *Allorchè un quadrilatero è inscritto in una curva di secondo grado, una trasversale qualunque taglia la curva e le due coppie di lati opposti in tre coppie di punti in involuzione.*

Teorema II. *Avendo una curva di secondo ordine inscritta in un quadrilatero, ogni sua tangente taglia i lati di questo in quattro punti il cui rapporto anarmonico è costante.*

Denotando con $U=0$, $U_1=0$ le equazioni di due tangenti ad una curva di secondo ordine e con $V=0$ quella della corda che ne congiunge i punti di tangenza, la equazione (1) $UU_1=V^2$ evidentemente rappresenta la curva.

Inoltre la $kk'U-(k+k')V+U_1=0$, k, k' denotando due costanti arbitrarie, essendo soddisfatta dal doppio sistema di equa-

zioni $kU-k'V=0$, $U_1-kV=0$; $k'U-kV=0$, $U_1-k'V=0$ ciascuno dei quali verificando la (1) rappresenta un punto sulla curva, simboleggia una corda qualunque che per $k=k'$ si tramuta in una tangente il cui punto di contatto è $U-V=0$, $U_1-kV=0$.

Le quattro tangenti fisse siano date dalle

$$(2)\quad l^2U-2lV+U_1=0;\ m^2U-2mV+U_1=0,\ n^2U-2nV+U=0,\ p^2U-2pV+U_1=0,$$

e la tangente mobile da (3) $k^2V-2kV+U_1=0$.

Eliminando V fra questa e ciascuna delle (2) le resultanti

$$(4)\quad lk.U-U_1=0,\ mk.U-U_1=0,\ nk.U-U_1=0,\ pk.U-U_1=0.$$

rappresentano le rette che congiungono i punti in cui la tangente mobile (3) taglia ciascuna delle tangenti fisse (2) col punto d'intersezione delle rette $U=0$, $U_1=0$. Quindi il rapporto anarmonico del fascio delle rette (4)

$$(5)\qquad \lambda=\frac{(n-l)(p-m)}{(n-m)(p-l)}.$$

non contenendo k è costante ed indipendente dalla posizione della tangente mobile: il chè dimostra il Teorema.

Corollario I. Essendo $U-V=0$, $U_1-lV=0$; $U-V=0$, $U_1-mV=0$; $U-V=0$, $U_1-nV=0$; $U-V=0$, $U_1-pV=0$ i punti di contatto delle tangenti fisse, ed $U-V=0$, $U_1-kV=0$ quello della tangente mobile, le rette che questo congiungono con ciascuno dei primi date dalle equazioni

$$(k-l)(kU-V)-(k-1)(kV-U_1)=0;\ (k-m)(kU-V)-(k-1)(kV-U_1)=0$$
$$(k-n)(kU-V)-(k-1)(kV-U_1)=0;\ (k-p)(kU-V)-(k-1)(kV-U_1)=0,$$

formano un fascio il cui rapporto anarmonico eguaglia la espressione (5). Laonde abbiamo il Teorema: *Il rapporto anarmonico relativo a quattro tangenti di una curva di secondo ordine eguaglia*

quello relativo ai loro punti di contatto.

Corollario II. Siano i lati di un esagono qualunque circoscritto ad una curva di secondo ordine rappresentati dalle equazioni

$$U=0,\ l^2U-2lV+U_1=0,\ m^2U-2mV+U_1=0,\ U_1=0,\ l_1^2U-2l_1V+U_1=0,\ m_1^2U-2m_1V+U_1=0,$$

in cui gli indici convengono ai lati opposti; i suoi vertici sono espressi dalle

$$U=0\,,\ U_1-2m_1V=0\,;\ U=0\,,\ U_1-2lV=0\,;\ (l+m)U-2V=0\,,\ (l+m)U_1-2lmV=0\,;\ U_1=0,\ mU-2V=0;\ U_1=0,\ l_1U-2V=0\,;\ (l_1+m_1)U-2V=0,\ (l_1+m_1)U_1-2l_1m_1V=0\,:$$

e le diagonali che congiungono i vertici opposti hanno per equazioni:

$$mm_1U+U_1-2m_1V=0\,;\ ll_1U+U_1-2lV=0;$$

$$U\Big(ll_1(m-m_1)+mm_1(l-l_1)\Big)+U_1\Big((m-m_1)+(l-l_1)\Big)-2V\Big[l(m-m_1)+m_1(l-l_1)\Big]=0.$$

Moltiplicando la prima di queste per $(l-l_1)$, la seconda per $(m-m_1)$ l'ultima per -1 ed addizionandole si ottiene una espressione identicamente nulla. Laonde abbiamo il Teorema di Brianchon *In ogni esagono circoscritto ad una curva di secondo ordine le diagonali che ne congiungono i vertici opposti s'intersecano in un medesimo punto.*

Teorema III. *Se una trasversale condotta per il punto* P *taglia la data Curva di secondo ordine nei pnnti* R_1, R_2 *e la sua polare in* R, *i punti* P, R; R_1, R_2 *formano un rapporto armonico.*

Infatti dalla relazione (n° 56) $\frac{2}{PR}=\frac{1}{PR_1}+\frac{1}{PR_2}$, si trae

$$\frac{1}{PR}-\frac{1}{PR_2}=-\left(\frac{1}{PR}-\frac{1}{PR_1}\right)\ \text{ovvero}\ \frac{RR_2}{PR_2}=-\frac{RR_1}{PR_1}\ \text{od}\ \frac{R_2R}{R_2P}:\frac{R_1R}{R_1P}=-1.$$

79. Teorema I. *La curva E ottenuta secando un cono circolare retto mediante un piano S che ne tagli tutte le generatrici è una ellisse.*



Per l'asse del cono si conduca un piano normale ad S e siano AA′ cc′ la retta di loro intersezione, e VA, VA′ le generatrici secondo cui esso taglia il cono. Nel piano AVA′ tracciate le due circonferenze tangenti alle rette AV, AA′, VA′ s'immagini che la figura risultante ruoti intorno all'asse OV: tali circonferenze generano due sfere tangenti alla superficie conica lungo i *paralleli hb, h′a*, e tangenti al piano S in F, F′.

Dal punto M della curva E si tirino le congiungenti MF, MF′, la MP perpendicolare ad AA′, la generatrice VM tangente in t, t' alle due sfere. Poichè le tangenti che da un punto vanno ad una sfera sono eguali, abbiamo:

$MF = Mt$, $MF' = Mt'$; $MF + MF' = tt' = ab = a'b'$: ma

$ab = bA + Aa = AF + AF' = 2AF + FF'$ e $a'b' = 2A'F' + FF'$ e per conseguenza $AF = A'F'$ ed $MF + MF' = A'F' + AF' = AA'$ relazione da cui si deduce essere la curva E una elisse coi fuochi F, F′ e coll'asse maggiore AA′.

I piani dei paralleli incontrano la AA′ in c, c' per cui $Ac = A'c'$. Infatti dai triangoli simili bAc, aAc'; $cA'b'$, $a'A'c'$ si ricavano le $Ab : Ac :: Aa : Ac'$, $A'a' : A'c' :: A'b' : A'c$ ovvero

$ab : cc' :: Ab : Ac$, $a'b' : cc' :: A'a' : A'c'$ e per $ab = a'b'$, $Ab = AF = A'F'$ $= A'a'$, la $Ac = A'c'$.

Le perpendicolari ad AA′ in c, c' contenute nel piano S sono

le direttrici della Ellisse. Sia kk' il diametro secondo cui il parallelo che passa per M taglia il piano AVA' e MP la retta in cui interseca S, le distanze di M dalle rette DC, D'C' sono misurate da Pc, Pc'. Dai triangoli simili APk, Acb; A'Pk', A'a'c' si ottengono le $Ak:AP::Ab:Ac$, $A'k':A'P::A'a':A'c'$ ovvero $bk:cP::Ab:Ac$, $a'k':c'P::A'a':Ac'$ e per $kb=Mt=MF$, $k'a'=Mt'=MF'$, ne deriva che le distanze di M da un fuoco, e dalla retta CD che gli corrisponde hanno un rapporto costante, il che definisce le direttrici.

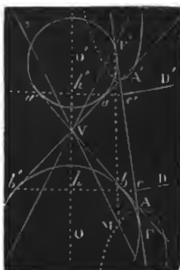
Teorema II. *La curva* P *ottenuta secondo un cono circolare retto con un piano* S *parallelo ad una sola generatrice è una parabola.*

Per l'asse del cono s'immagini condotto un piano normale al S e siano cAP la retta di loro intersezione e Vk, Vk' le generatrici in cui il cono è secato, Vk ed AP essendo in questo caso paralleli. Inoltre nel piano kVk' si descriva una circonferenza tangente alle rette Vk, Vk', AP: questa rotando la figura intorno all'asse VP genera una sfera tangente alla superficie conica lungo il parallelo bb' e tangente in F al S. Da un punto M della curva si conducono il parallelo, (kk', PM essendo le sue intersezioni coi piani kVk' ed S), la congiungente MF, la generatrice VM che tocca in t la sfera: infine in c ove passano bb', PA s'elevi in S la normale cD. Il triangolo Vkk' essendo isoscele ed AP parallela a Vk, abbiamo $AP=Ak'$ $Ab'=Ac$, ma $Mt=MF=b'k'$ e $b'k'=Ak'+Ab'=AP+Ac=Pc$ sicchè si trova $MF=Pc$: laonde la curva P è una parabola che ha in F il fuoco e la cD per direttrice.

Teorema III. *La curva* I *ottenuta secondo un cono circolare retto con un piano* S *parallelo a due generatrici è una iperbola.*

Secato il cono con un piano condotto per l'asse perpendicolare al piano S secondo le generatrici VA'b', VAa' ed S in A'A, si de-

scrivano due circonferenze tangenti alle rette VA', VA, AA': la figura ruotando intorno l'asse OV esse generano due circonferenze tangenti alla superficie conica lungo i paraleli ah' bh, e tangenti ad S in F ed F'.



Da un punto M di I si tirino le congiungenti MF, MF' e la generatrice MV che tocca le due sfere in t e t', abbiamo $Mt=MF$, $Mt'=MF'$ e $tt'=MF'-MF$: ma $tt'=ab'=a'b$, ed $ab'=A'b'-A'a=A'F-A'F=AA'+AF-A'F$, $a'b=AF'-AF=AA'+A'F'-AF$ e per conseguenza $A'F'=AF$ e $MF'-MF=AA'$. Pertanto la curva I è una iperbola avente F,F' per fuochi ed AA' per asse trasverso.

Nei punti c,c' ove i piani dei paralleli tagliano AA' si elevino in S le normali cD, $c'D'$: queste sono le direttrici della iperbola. La dimostrazione è identica con quella sviluppata nel Teorema I.

Esercizi.

I. Determinare il luogo di un punto tale che le due coppie di tangenti condotte da esso a due date curve di secondo ordine formino sempre un fascio armonico.

II. Avendo un quadrilatero, circoscritto ad una curva di secondo ordine le due coppie di rette condotte da un medesimo punto ai suoi vertici opposti e le due tangenti condotte da esso alla curva, formano un fascio in involuzione.

III. La curve di secondo ordine circoscritte al medesimo quadrilatero incontrano una trasversale qualunque in un sistema di punti in involuzione.

GEOMETRIA NELLO SPAZIO



CAPITOLO I.

CONSIDERAZIONI GENERALI

Determinazione di un punto nello spazio.

1. *Coordinate rettilinee.* Adoperando il sistema immaginato da Cartesio la posizione di un punto nello spazio si determina riferendola a tre rette fisse, non situate nello stesso piano concorrenti in un unico punto od *origine.* Queste nominate *assi coordinati* possono considerarsi come intersezioni di tre piani, parimente fissi e dati in situazione, detti *piani coordinati*, nei quali due a due esse sono contenute. Gli assi si designano colle lettere x, y, z e il punto origine colla lettera O, ed i piani coordinati prendono nome da quelli assi per cui sono condotti. Così essendo Ox, Oy, Oz i tre assi coordinati, i piani che li corrispondono sono designati con xOy ovvero xy, xOz ovvero xz, yOz od yz.

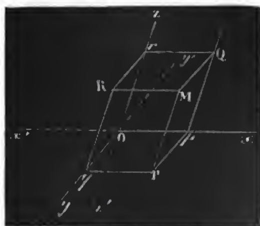
Dal punto dato abbassate sui piàni coordinati tre rette respettivamente parallele agli assi per queste, se date in grandezza ed in direzione, la posizione del punto nello spazio è completamente definita. Per convenzione ammesso che il punto origine O divida ogni asse in due rami indefiniti opposti in direzione, uno dei quali si abbia come positivo, (i segmenti contati su di esso da O siano espressi da numeri positivi), l'altro come negativo, (i segmenti presi su di esso da O siano espressi da numeri negativi), tali parallele si ritengono positive quando hanno direzione opposta con quella del ramo positivo dell'asse a cui sono parallele, e negative se vanno nella stessa direzione. Esse dette *coordinate* del

punto, sono indicate coi simboli x, y, z (usando la lettera dell'asse corrispondente), se indeterminate, e con altre lettere a, b, c se le sono attribuiti noti valori.

2. Osservando che i tre piani coordinati formano nell' origine otto angoli solidi triedri, per costruire un punto allorchè ne sono note le coordinate conviene, 1.° investigare in quale di tali angoli solidi è contenuto, 2.° fissare in questo la sua posizione. Per la prima ricerca servono i segni di cui sono affette le coordinate del punto, per l'altra la loro assoluta grandezza.

Denotando con Ox', Oy', Oz' i rami negativi degli assi e perciò con $Oxyz$, $Ox'yz$, $Oxy'z$, $Oxyz'$, $Oxy'z'$, $Ox'yz'$, $Ox'y'z$, $Ox'y'z'$ gli otto angoli solidi, i segni delle coordinate di un punto secondo che sta in una di tali regioni per i principi già ammessi sono segnati nel seguente quadro:

Nell'angolo triedro	$Oxyz$	le coordinate sono	$+x$, $+y$, $+z$
. . . .	$Ox'yz$	. . . . .	$-x$, $+y$, $+z$
. . . .	$Oxy'z$	. . . . .	$+x$, $-y$, $+z$
. . . .	$Oxyz'$	. . . . .	$+x$, $+y$, $-z$
. . . .	$Oxy'z'$	. . . . .	$+x$, $-y$, $-z$
. . . .	$Ox'yz'$	. . . . .	$-x$, $+y$, $-z$
. . . .	$Ox'y'z$	. . . . .	$-x$, $-y$, $+z$
. . . .	$Ox'y'z'$	. . . . .	$-x$, $-y$, $-z$



Conoscendo la regione $Oxyz$ in cui un punto M è situato, per determinarne la situazione con una geometrica costruzione, preso sui tre assi Ox, Oy, Oz lunghezze Op, Oq, Or respettivamente eguali alle date coordinate, si formi il parallelepipedo OPQR, che ha per tre costole adiacenti tali lunghezze, il vertice M opposto all'origine O è il punto richiesto.

Infatti per esso abbiamo $MP=Or=z$, $MR=Op=y$, $MQ=Oq=x$.

Pertanto, nota la situazione di un punto nello spazio, in grandezza e direzione sono parimente note le sue coordinate; inversamente queste essendo date ne resulta determinata la sua posizione.

I sistemi di assi coordinati nei quali gli angoli che a due a due questi formano sono qualunque vengono chiamati sistemi *obliquangoli*; quelli poi in cui tali angoli sono retti sono detti *ortogonali* o *rettangolari*.

Abbassata da un punto una perpendicolare sopra un piano od un asse, il suo piede nominasi *projezione ortogonale* del punto sul piano o sull'asse dato. Le coordinate rettangolari di un punto, che sono le perpendicolari da esso tirate sui tre piani coordinati, eguagliano e quella che projetta ortogonalmente il punto sovra uno di questi e le due coordinate della projezione ottenuta; eguagliano anche i segmenti compresi sugli assi fra le prejezioni ortogonali del punto, e la origine, ed affetti del segno che appartiene al ramo dell'asse su cui sono contati.

Pertanto indicate con a, b, c, le coordinate di un punto, la sua posizione viene espressa dalle tre equazioni, $x=a$, $y=b$, $z=c$: cosicchè ad ogni sistema di valori reali attribuiti alle quantità a, b, c, corrisponde un punto nello spazio ed inversamente per ogni punto dato si ottengono per esse particolari valori.

Allorchè una delle tre coordinate di un punto è nulla, esso giace nel piano delle altre due coordinate: per conseguenza le tre equazioni $x=0$, $y=b$, $z=c$ rappresentano un punto del piano yz, le $x=a$, $y=0$, $z=c$ un punto del piano zx, e le $x=a$, $y=b$, $z=0$ uno del piano xy.

Quando due delle tre coordinate di un punto sono nulle, esso giace sull' asse relativo alla rimanente coordinata; perciò le equazioni $x=o$, $y=o$, $z=c$ convengono ad un punto sull'asse delle z, le $x=0$, $y=b$, $z=0$ ad un punto sull' asse delle y, e le $x=a$, $y=0$, $z=0$ ad uno sull'asse delle x. Infine l'origine, essendo la intersezione dei tre assi, è espressa da $x=0$, $y=0$, $z=0$.

3. *Coordinate polari.* Altro modo di effettuare la determinazione di un punto nello spazio di frequente usato è il sistema delle coordinate polari. In questo si considera *un piano direttore*, in cui giace un *asse polare* sul quale è preso un punto fisso, *polo.* Elevata nel polo O sul piano direttore DD' una perpendicolare Oz, le coordinate polari che definiscono la situazione del punto M nello spazio sono: 1.° la distanza, $OM=r$ del punto dal polo, (*raggio vettore*), 2.° l'angolo $zOM=\theta$ che questo forma colla perpendicolare Oz; 3.° l'angolo rettilineo ψ avente in O il vertice che misura l'angolo diedro compreso fra il piano verticale tirato per il raggio vettore coll'altro che passa per l'asse polare. Gli angoli θ, ψ possono variare, il primo da 0° a 360°, l'altro da 0° a 180°.

4. Immaginiamo una superficie qualunque riferita al sistema di assi ortogonali $Oxyz$ preso in uno dei piani coordinati, nel piano xy, un punto qualunque m, ($x=a$, $y=b$), questo può essere considerato come la projezione sopra xy di uno o di più punti M della superficie, di modo che elevando una parallela all'asse zOz', i segmenti di questa compresi fra m e la superficie sono i valori di z corrispondenti ai punti M. Pertanto, nota essendo la superficie, ad ogni sistema individuo di valori attribuiti alle variabili x, y corrispondono in generale punti di questa, e perciò determinati valori di z; laonde z potendo essere espressa per x, y è una funzione di queste variabili la cui natura dipende da quella della superficie, funzione che deriva da una relazione sussistente frai punti m, M per cui, se costante, noto m si deriva M ed inversamente. Tale funzione, simboleggiata con $z=f(x,y)$ ovvero $F(x,y,z)=0$, indicando analiticamente la legge colla quale si succedono i punti costituenti la superficie o una qualunque delle proprietà che geometricamente la definiscono si chiama *la sua equazione.*

Un piano parallelo ad uno dei piani coordinati godendo della proprietà d'avere per ogni suo punto la stessa coordinata a tal piano perpendicolare è da questa proprietà rappresentato. Così l'equa-

zione $x=a$ esprime il piano paralello a zy e da questo distante di una lunghezza a, ($x=0$ indica poi il piano zy); $y=b$ è un piano paralello a zx condotto ad una distanza b, ($y=0$ è il piano zx) e $z=c$ è un piano parallelo a xy e distante da esso di c, ($z=0$ è il piano xy).

Una linea nello spazio potendo sempre essere definita quale intersezione di due date superficie analiticamente è rappresentata dalle due equazioni che a queste corrispondono le quali vengono chiamate *equazioni della linea*. Se si projetta ortogonalmente ogni suo punto sopra un piano coordinato la linea in cui sono contenute tali projezioni nominasi *projezione della linea data*, e poichè questa ha tre projezioni, poste respettivamente nei piani xy, xz, yz può considerarsi come intersezione di due qualunque dei tre cilindri retti che hanno quelle per base e per generatrice una retta parallela all'asse perpendicolare al piano coordinato di projezione.

Una retta parallela ad uno degli assi coordinati è l'intersezione di due piani respettivamente paralleli ai piani coordinati che tale asse contengono, e perciò dalle loro equazioni è pienamente determinata. Così le due equazioni $x=a$, $y=b$ indicano una retta paralella all'asse della z, le $x=a$, $z=c$ una parallela all'asse delle y, e le $y=b$, $z=c$ una parallela all' asse delle x: e le $x=0$, $y=0$; $x=0$, $z=0$; $y=0$, $z=0$ respettivamente gli assi Oz, Oy, Ox

Interpetrazione delle equazioni.

5. Sia data la equazione

$$(1) \qquad f(x, y, z)=0,$$

la quale significa tale relazione fra le tre variabili x, y, z per cui una di esse può essere determinata mediante le altre due che rimangono sempre arbitrarie. Si supponga risoluta per z, o si consi-

deri la equazione $z=F(x,y)$, nella quale ritenendo x, y per le *variabili indipendenti*, là z è la *funzione*. Preso il sistema ortogonale di assi $Oxyz$, e nel piano xy il punto m ($x=\alpha$, $y=\beta$) in esso si elevi una retta parallela all'asse delle $z'Oz$, e da m si misuri su questo una lunghezza eguale alla quantità $F(\alpha,\beta)$, il punto M che resulta ha per coordinate valori che soddisfano all'equazione data (1). Procedendo in simil modo si ottiene una serie di punti i quali costituiscono una superficie poichè sopra ogni coordinata parallela all'asse delle z ed inalzata in un punto m del piano xy sta un unico punto M.

Se l'equazione (1) dà per z più valori

$$(2) \qquad z=F_1(x,y), \; z=F_2(x,y), \; z=F_3(x,y), \; \ldots,$$

essa rappresenta punti le cui coordinate soddisfano all'equazioni (2), e quindi *una superficie costituita di più falde*. Sopra l'ordinata condotta da m parallelamente ad Oz possono giacere più punti M, di cui ciascuno in generale appartiene ad una *sola falda*.

I valori arbitrari α e β attribuiti alle variabili x,y, che definiscono il punto m devono non solamente essere quantità reali, ma dare inoltre per z valori reali. Se questa condizione non sussiste o se la (1) non è soddisfatta da valori reali di x, y, z, essa non ammette alcuna geometrica interpetrazione.

Se la (1) può decomporsi in altre equazioni distinte, le une dall'altre indipendenti, o se

$$f(x,y,z)=f_1(x,y,z)\times f_2(x,y,z)\times f_3(x,y,z)\times \ldots =0,$$

essa rappresenta tante distinte superficie date dalle equazioni

$$f_1(x,y,z)=0\,; \; f_2(x,y,z)=0, \; \ldots$$

Ogni equazione che solamente contenga due variabili rappresenta sempre una superficie, ma appartenente ad una particolare specie. Siano l'equazioni

$$f(x,y)=0,\ f_1(y,z)=0,\ f_2(y,z)=0,$$

delle quali la prima è soddisfatta da coppie di valori per x e per y, indipendentemente dalla z, la seconda da valori per x e per z, indipendentemente dalla y, la terza da valori per y e per z indipendentemente da x. Per ritrovare il loro significato geometrico, preso un sistema ortogonale di assi, per $f(x,y)=0$, nel piano xy si determinino tutti i punti m (i quali evidentemente costituiscono una curva) fra le cui coordinate x, y sussista la relazione significata da tale equazione; quindi si elevi da uno di questi m una parallela all'asse Oz, i punti dello spazio che in questa giacciono sono tali che hanno per projezione ortogonale sopra xy il punto m, e perciò hanno con questo le medesime coordinate x,y. Laonde l'equazione $f(x,y)=0$ rappresenta una tale superficie, nominata *superficie cilindrica*, che è generata da una retta, *generatrice*, la quale scorre parallelamente a se stessa ed all' asse z lungo una curva, *direttrice*, posta sul piano xy e che in questo ha per equazione $f(x,y)=0$. In simil modo si deduce che l' equazione $f(x,z)=0$, rappresenta una superficie cilindrica la cui generatrice è parallela all' asse Oy e la cui direttrice è la curva nel piano xy data dalla $f(x,z)=0$, e che l'equazione $f(y,z)=0$ rappresenta parimente una superficie cilindrica la cui generatrice è parallela all'asse Ox, e che ha per direttrice nel piano yz la curva $f(y,z)=0$.

Ogni equazione algebrica che solo contenga una variabile rappresenta un sistema di piani. Sia l'equazione $f(x)=0$ di grado m essendo essa soddisfatta da m valori reali od immaginari di x, designati con α_1, α_2. α_3, . . . , α_m, prende necessiariamente la forma,

$$f(x)=\mathrm{H}(x-\alpha_1)\ (x-\alpha_2)\ (x-\alpha_3)\ .\ .\ .\ (x-\alpha_m)=0,$$

e però si scinde nelle m equazioni lineari

$$x=\alpha_1,\ x=\alpha_2,\ x=\alpha_3, \ldots x=\alpha_m,$$

delle quali quelle che contengono una radice immaginaria non han-

no alcuna geometrica significazione, mentre le altre rappresentano un sistema di piani paralleli al piano coordinato zy, il cui numero eguaglia quello delle radici reali di tale equazione. Parimente $f(y)=0$, $f(z)=0$, convengono a piani respettivamente paralleli a zx, a xy.

6. Due equazioni che simultaneamente esistono fra tre variabili x, y, z, rappresentano una curva in quanto che ogni punto dello spazio le cui coordinate ad esse soddisfano deve giacere sopra le due superficie che esse, prese isolatamente, significano, e perciò deve appartenere alla linea secondo cui s'intersecano. E siccome delle date equazioni si derivano, insieme combinandole in vari modi, infiniti sistemi d'altre equazioni ad esse equivalenti, così la medesima linea dello spazio può essere analiticamente espressa in molte forme diverse come geometricamente può considerarsi generata dalla intersezione di superficie svariatissime.

Si abbia la linea definita dalle equazioni

$$(1) \qquad F(x,y,z)=0\,,\quad F_1(x,y,z)=0:$$

fra queste successivamente eliminando una delle variabili, e due a due insieme combinando le resultanti ottenute,

$$\varphi_1(x,y)=0\,,\quad \varphi_2(x,z)=0\,,\quad \varphi_3(y,z)=0\,,$$

i sistemi

$$(2) \qquad \varphi_1(x,y)=0,\ \varphi_2(x,z)=0\,;\ \varphi_1(x,y)=0,\ \varphi_3(y,z)=0\,;$$
$$\varphi_2(x\,,z)=0,\ \varphi_3(y,z)=0,$$

equivalenti alle (1) esprimono con queste la medesima linea, la quale per tal modo può ritenersi quale intersezione di due superficie cilindriche rispettivamente parallele a due dei tre assi coordinati. Tali superficie cilindriche nominansi *cilindri projettanti la curva* sui piani coordinati, e le loro direttrici sue *projezioni* (n.° 4).

Tre equazioni simultaneamente esistenti fra le tre coordinate variabili x, y, z, dando per queste un numero in generale deter-

minato di sistemi di valori atti a soddisfarle, esprimono punti dello spazio non costituenti una linea, ne una superficie.

Projezioni.

7. La projezione ortogonale (n.° 4) *di una linea sopra una retta fissa od asse ovvero sopra un piano fisso è la linea in cui giacciono le projezioni di tutti i suoi punti; quindi la projezione di una retta di determinata lunghezza eguaglia la retta che congiunge le projezioni dei suoi punti estremi. Allorchè una o più linee insieme congiunte chiudono un area piana, l'area compresa nella projezione di tali linee su di un piano fissò è detta* la sua projezione.

Teorema I. *La projezione ortogonale di una retta limitata sovra un asse eguaglia il prodotto della retta stessa per il coseno dell' angolo che essa forma coll' asse.*

Abbassando dalle estremità della lunghezza data perpendicolari sull' asse, il segmento frai piedi di queste compreso è la sua ortogonale projezione: e se uno dei punti estremi della retta giace sull' asse, immediatamente resulta il Teorema enunciato osservando essere la projezione il cateto di un triangolo rettangolo la cui ipotenusa è la retta data, e di cui l'angolo ad esso adjacente è l' angolo d' inclinazione. Nel caso generale pei punti estremi A e B della retta si conducano piani perpendicolari all' asse, e siano *a* e *b* i punti nei quali respettivamente lo seghino: da A sia tirata una retta parallela all' asse *ab* e sia prolungata fino in C, punto ove incontra il piano che passa per B. Le rette AC, *ab* sono parallele perchè normali ad un medesimo piano, e sono equali perchè comprese fra piani paralleli. Inoltre ricordando che l'angolo di due rette non contenute nel medesimo piano eguaglia l' angolo compreso fra una di esse ed una retta menata da un punto di questa parallelamente all'altra, è evidente essere l' angolo B A C eguale

all'angolo d'inclinazione di AB sovra l'asse ab. Laonde abbiamo

$$ab = AC = AB \cdot \cos BAC.$$

Corollario. I. Avendo una linea poligonale ABCDE ed un asse LL_1 e convenendo di misurare gli angoli di inclinazione di ogni suo lato AB, BC, .., EA sopra LL_1 tutti nella medesima direzione, la sua projezione *abcde* sull'asse resulta composta delle singole projezioni *ab*, *bc*, *cd*, *de*, dei lati, prese positive o negative secondo che acuti od ottusi sono gli angoli d'inclinazione che le corrispondono, ed è sempre compresa frai punti *a*, *e* projezioni dei suoi punti estremi A, E. Pertanto dalla equazione

$$ae = ab + bc + cd + de$$

si trae il Teorema: *la somma algebrica delle projezioni dei lati di una linea poligonale eguaglia la projezione della retta che ne unisce i punti estremi.*

Corollario II. Sia la retta AB nello spazio ed i tre assi ortogonali $Oxyz$: conducendo da A tre rette Ax', Ay', Az' a questi respettivamente parallele, è evidente come le projezioni di AB sopra due assi paralleli Ox, Ax', od Oy, Ay' od Oz, Az' siano eguali. Perciò alle projezioni di AB sul sistema $Ozxy$, possono venire sostituite quelle formate sul sistema $Ax'y'z'$. Queste però coincidono colle costole concorrenti in A di un parallelepipido rettangolo avente AB per diagonale. Per conseguenza abbiamo *che il quadrato della retta* AB *è uguale alla somma dei quadrati delle tre sue projezioni sopra tre assi ortogonali.*

Corollario III. Designando con l la retta data AB, con l_x, l_y, l_z le sue projezioni sugli assi Ox, Oy, Oz e con α, β, γ gli angoli che essa respettivamente forma con questi, abbiamo le relazioni

$$(1) \qquad l^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2,$$

$$(2) \qquad l_x = l \cos\alpha, \quad l_y = l \cos\beta, \quad l_z = l \cos\gamma,$$

dalle quali immediatamente si trae,

$$1=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma. \tag{3}$$

Quindi *la somma dei quadrati dei coseni degl' angoli d'inclinazione di una retta su tre assi coordinati ortogonali*, (*nominati* suoi coseni di direzione) *eguaglia l' unità.*

Teorema II. *Avendo due rette nello spazio* AB, LM *le quali riferite ad un sistema ortogonale di assi coordinati abbiano per coseni di direzione, la prima* $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, *l'altra* $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$, *l' angolo* Θ *che esse comprendono è determinato dalla relazione,*

$$\cos\Theta=\cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1. \tag{4}$$

Conducendo dall'origine O del sistema le rette O*a*, O*l* respettivamente parallele alle rette date AB, LM, esse formano e fra loro e cogli assi angoli eguali a quelli che a queste corrispondono e perciò le possono essere sostituite. Preso sopra ciascuna di esse da O segmenti O*b*, O*m* eguali alla unità, $Ob=Om=1$, e tirata la congiungente bm, dal triangolo che ne resulta si trae $bm^2=2-2\cos\Theta$. Ma notando che bm è la retta la quale unisce i punti estremi della linea poligonale mob, per le sue projezioni sui tre assi Ox, Oy, Oz si hanno le espressioni:

$$(\cos\alpha_1-\cos\alpha),\ (\cos\beta_1-\cos\beta),\ (\cos\gamma_1-\cos\gamma);$$

e perciò ne consegue:

$$mb^2=2-2\cos\Theta=(\cos\alpha_1-\cos\alpha)^2+(\cos\beta_1-\cos\beta)^2+(\cos\gamma_1-\cos\gamma)^2.$$

Sviluppando] e riducendo per la formula (3) si ottiene:

$$\cos\Theta=\cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1.$$

Corollario. Elevando a quadrato ambo i membri della for-

mula (4) e sottraendoli dalla unità, si deduce

$$sen^2 \Theta = 1 - (\cos\alpha \cos\alpha_1 + \cos\beta \cos\beta_1 + \cos\gamma \cos\gamma_1)^2$$

ovvero per la (3)

$$sen^2 \Theta = (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1) - (\cos\alpha \cos\alpha_1 + \cos\beta \cos\beta_1 + \cos\gamma \cos\gamma_1)^2 :$$

laonde eseguite le indicate operazioni questa si trasforma nella formula che esprime il seno dell' angolo di due rette pei loro coseni di direzione,

(5) $$sen^2 \Theta = (\cos\beta \cos\gamma_1 - \cos\beta_1 \cos\gamma)^2 + (\cos\gamma \cos\alpha_1 - \cos\gamma_1 \cos\alpha)^2 + (\cos\alpha \cos\beta_1 - \cos\beta \cos\alpha_1)^2.$$

8. PROBLEMA I. *Essendo date le projezioni l_x, l_y, l_z di una retta l sopra tre assi coordinati ortogonali Ozxy, ed una retta fissa od asse LL_1 i cui coseni di direzione siano $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, determinare 1.° la lunghezza l, 2.° i suoi coseni di direzione, $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\pi$, (λ angolo d'inclinazione sull'asse Ox, μ sull'asse Oy, π sull'asse Oz): 3.° la sua projezione sull'asse LL_1.*

Dalle formule (1), (2) immediatamente si trae:

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}; \quad \cos\lambda = l_x : \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}, \quad \cos\mu = l_y : \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}, \quad \cos\pi = l_z : \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}.$$

Inoltre, indicato con Θ l'angolo che le rette l e LL_1 insieme comprendono, abbiamo:

$$p = l\cos\Theta = l(\cos\alpha \cos\lambda + \cos\beta \cos\mu + \cos\gamma \cos\pi)$$

(1) $$p = l_x \cos\alpha + l_y \cos\beta + l_z \cos\gamma.$$

Donde, osservando essere $l_x \cos\alpha$, $l_y \cos\beta$, $l_z \cos\gamma$, le projezioni di

l_x, l_y, l_z sull'asse LL_1, si deduce la proposizione: *che la projezione di una retta l sopra un' altra LL_1 si ottiene determinando le sue projezioni sopra tre assi ortogonali e prendendo la somma delle projezioni di queste sulla seconda retta LL_1.*

Problema II. *Avendo due punti $M(x_1 y_1 z_1)$, $M'(x_2 y_2 z_2)$ riferiti ad un sistema ortogonale di assi $Oxyz$ esprimerne la distanza δ in funziòne delle lòrò coordinate.*

Le coordinate di M, e di M' essendo le projezioni delle rette OM, OM' sugli assi, e δ essendo la congiungente dei punti estremi M, M' della linea poligonale MOM' evidentemente abbiamo

$$\delta_x = x_2 - x_1, \quad \delta_y = y_2 - y_1, \quad \delta_z = z_2 - z_1:$$

ed in conseguenza

$$\delta = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{2}$$

Corollario I. Indicato con $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ i coseni di direzione di δ, per la (2) le loro espressioni sono

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= (x_2 - x_1) : \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \\ \cos\beta &= (y_2 - y_1) : \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \\ \cos\gamma &= (z_2 - z_1) : \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Corollario II. *Dati nello spazio i punti $A(x_1 y_1 z_1)$, $B(x_2 y_2 z_2)$, $C(x_3 y_3 z_3)$ riferiti ad un sistema òrtogonale di assi, esprimere l'area Δ del triangolo ABC di cui essi sono i vertici in funzione delle loro còordinate.*

Indicando con δ, δ_1, i due lati adiacenti AB, AC, con θ l'angolo compreso, con $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ i loro coseni di direzione, per le (3) abbiamo,

$$\begin{aligned} &\cos\alpha = (x_2 - x_1) : \delta, \quad \cos\beta = (y_2 - y_1) : \delta, \quad \cos\gamma = (z_2 - z_1) : \delta \\ &\cos\alpha_1 = (x_3 - x_1) : \delta_1, \quad \cos\beta_1 = (y_3 - y_1) : \delta_1, \quad \cos\gamma_1 = (z_3 - z_1) : \delta_1, \end{aligned}$$

e per la (5) n.° 7

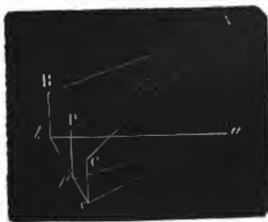
$$sen^2\theta=\Big[\Big((y_1z_2)+(y_2z_3)+(y_3z_1)\Big)^2+\Big((z_1x_2)+(z_2x_3)+(z_3x_1)\Big)^2$$
$$+\Big((x_1y_2)+(x_2y_3)+(x_3y_1)\Big)^2\Big]:\delta^2\delta_1^{\,2}.$$

Ma l'area Δ è espressa da $2\Delta=\delta\delta_1 sen\,\theta$, perciò sostituendo si ottiene

$$(4)\quad \Delta=\frac{1}{2}\sqrt{\Big((y_1z_2)+(y_2z_3)+(y_3z_1)\Big)^2+\Big((z_1x_2)+(z_2x_3)+(z_3x_1)\Big)^2+\Big((x_1y_2)+(x_2y_3)+(x_3y_1)\Big)^2}.$$

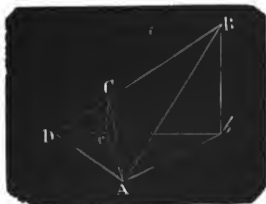
9. Teorema. *La projezione di una area piana sopra un piano fisso eguaglia il prodotto dell' area medesima per il coseno dell' angolo rettilineo il quale misura l' angolo diedro formato dai due piani.*

In primo luogo consideriamo un triangolo ABC la cui base CB sia parallela al piano fisso; la sua projezione abc è un triangolo in cui il lato ac è eguale e parallelo ad AB. Per il vertice B condotto un piano perpendicolare a CB siano P, p i punti in cui sega CB, cb, punti dei quali il secondo è la projezione del primo, e che sono i piedi delle altezze dei due triangoli; nominato θ l'angolo che queste formano, abbiamo



$$ABC=\frac{1}{2}.CB.AP,\quad abc=\frac{1}{2}.bc.ap,\quad ap=AP.\cos\,\theta,$$

e perciò $abc=\frac{1}{2}.CB.AP.\cos\theta,=ABC\cos\theta$. θ essendo l'angolo rettilineo corrispondente ai due piani ABC, *abc*.



In secondo luogo avendo il triangolo ABC situato comunque nello spazio, per uno dei suoi vertici A, sia menato un piano parallelo a quello fisso MN, e sia AD la retta secondo cui taglia il piano del dato triangolo, e sia D il punto in cui le rette CB, AD si intersecano. Le projezioni di una stessa area su piani paralleli essendo eguali, si projettino i triangoli CAD, BAD, ABC sul piano AD*b*, e nominato θ l'angolo rettilineo dei piani ABC, MN abbiamo

$$cAD=CAD.\cos\theta,\ bAD=BAD.\cos\theta:$$

e quindi

$$(1)\qquad cAb=bAD-cAD=(BAD-CAD)\cos\theta=ABC\cos\theta.$$

Un poligono P potendo essere decomposto in triangoli, le cui projezioni formano la sua projezione p, dalla (1) si trae immediatamente $p=P\cos\theta$. Inoltre questa formula può essere estesa alle aree curvilinee, adoperando il metodo dei limiti, in quanto che possono essere considerate come limiti di poligoni in esse inscritti o ad esse circoscritti.

Corollario I. Siccome l'angolo rettilineo di due piani eguaglia quello compreso da due rette a questi respettivamente perpendicolari, così l'area piana A normale alla retta la quale riferita al sistema ortogonale di assi O zxy è in direzione determinata dei coseni $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, ha per angoli d'inclinazione sui piani coordinati

yz, zx, xy respettivamente gli angoli α, β, γ. Laonde, denotando con A_x, A_y, A_z, le projezioni di A sui piani zy, zx, xy, abbiamo

$$(2) \qquad A_x = A\cos\alpha, \quad A_y = A\cos\beta, \quad A_z = A\cos\gamma$$

ed inoltre per la (3) n.° 7,

$$(3) \qquad A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2.$$

Dalla quale si deduce il Teorema: *il quadrato di una area piana è eguale alla somma dei quadrati delle sue projezioni sopra tre piani scambievolmente perpendicolari.*

Corollario II. *Determinare la espressione del volume di una piramide triangolare in funzione delle coordinate rettangolari dei suoi vertici*

Siano $a(x_1y_1z_1)$, $b(x_2y_2z_2)$, $c(x_3y_3z_3)$, $d(x_4y_4z_4)$ i quattro vertici della piramide V riferiti al sistema ortogonale di assi $Oxyz$: e designato con A l' area del triangolo bcd preso per base della piramide, con h la sua altezza o la perpendicolare ap abbassata dal vertice a sul piano bcd, abbiamo $V = \frac{1}{3}A.h$ Ma notando come h sia la projezione della costola ab sopra ap e perciò eguagli la somma delle projezioni sopra ap delle tre projezioni di ab sugli assi, si ottiene la espressione:

$$h = (x_1 - x_2)\cos(h,x) + (y_1 - y_2)\cos(h,y) + (z_1 - z_2)\cos(h,z).$$

Però, Corollario I, l'angolo (h,x) eguaglia l' angolo che il piano della base A forma col piano cordinato zy, (h,y) quello di A con zx, (h,z) quello di A con xy: donde per le formule (2) i coseni di tali angoli sono espressi dalle

$$\cos(h,x) = A_x : A, \quad \cos(h,y) = A_y : A, \quad \cos(h,z) = A_z : A$$

e quindi

$$(4)\qquad h=\Big[(x_1-x_2)A_x+(y_1-y_2)A_y+(z_1-z_2)A_z\Big]:A.$$

Sostituendo, per il volume della piramide, deriva la espressione:

$$(5)\qquad V=\frac{1}{3}\Big[(x_1-x_2)A_x+(y_1-y_2)A_y+(z_1-z_2)A_z\Big].$$

Ricordando essere (pag. 55),

$$2A_x=(z_2y_3)+(z_3y_4)+(z_4y_2)=\begin{vmatrix}1, & z_2, & y_2\\ 1, & z_3, & y_3\\ 1, & z_4, & y_4\end{vmatrix}$$

$$2A_y=(x_2z_3)+(x_3z_4)+(x_4z_2)=\begin{vmatrix}1, & x_2, & z_2\\ 1, & x_3, & z_3\\ 1, & x_4, & z_4\end{vmatrix}$$

$$2A_z=(y_2x_3)+(y_3x_4)+(y_4x_2)=\begin{vmatrix}1, & y_2, & x_2\\ 1, & y_3, & x_3\\ 1, & y_4, & x_4\end{vmatrix}$$

la (5) si riduce nella

$$(6)\qquad V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1-1, & x_1-x_2, & y_1-y_2, & z_1-z_2\\ 1 & , x_2 & , y_2 & , z_2\\ 1 & , x_3 & , y_3 & , z_3\\ 1 & , x_4 & , y_4 & , z_4\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1, & x_1, & y_1, & z_1\\ 1, & x_2, & y_2, & z_2\\ 1, & x_3, & y_3, & z_3\\ 1, & x_4, & y_4, & z_4\end{vmatrix}.$$

Trasformazione delle Coordinate.

10. L'origine e la direzione degli assi coordinati a cui la posizione di un punto nello spazio è riferita essendo arbitrarie, e la soluzione dei particolari problemi riducendosi più semplice ed ele-

gante scegliendoli convenientemente è necessario stabilire le relazioni che devono aver luogo fra le coordinate di un medesimo punto prese relativamente a due sistemi diversi d' assi coordinati, mediante le quali si può all' uno l' altro sostituire e ad una equazione attribuire forme differenti. Il passaggio da un sistema ad un secondo, ambedue obliquiangoli, si può effettuare, I.° cambiando unicamente l' origine e mantenendo inalterata la direzione degli assi, II.° tenuta fissa l' origine variando la direzione degli assi.

Problema I. *Trasformare il sistema obliquiangolo d'assi* $Ozxy$ *in altro che abbia in* $O'(x=a,\ y=b,\ z=c)$ *la origine e i nuovi assi* $O'Z$, $O'Y$, $O'X$ *respettivamente paralleli ai primitivi* Oz, Oy, Ox.

Preso un punto qualunque M dello spazio, ed indicato con x, y, z le sue coordinate nel primo sistema, con X, Y, Z quelle nel secondo, poichè le projezioni di $O'M$ su due assi paralleli sono eguali e sono espresse da $x-a$, X sopra Ox, $O'X$; $y-b$, Y sopra Oy, $O'Y$; $z-c$, Z sopra Oz, $O'Z$ abbiamo

(1) $$X=x-a,\ Y=y-b,\ Z=z-c;\ \text{ovvero}$$

(2) $$x=X+a,\ y=Y+b,\ z=Z+c.$$

Problema. II. *Trasformare il sistema obliquangolo d'assi* $Ozxy$, *in altro* OZYX *parimente obliquangolo ma che abbia col precedente la medesima origine.*

Convenendo di rappresentare l' angolo chiuso da due rette concorrenti, Ox, Oy, mediante il simbolo x,y composto delle lettere che denotano ciascuna retta, la soluzione di questo problema s' ottiene facilmente adoperando le projezioni ortogonali, metodo immaginato da Français.

Siano (x, y, z), (X,Y,Z) le coordinate di un punto M nello spazio prese e nel primitivo e nel nuovo sistema: s' elevino in O sui piani coordinati xy, zx, zy le perpendicolari ON'', ON', ON, e sopra ciascuna di queste si projettino le linee spezzate $x+y+z$, $X+Y+Z$ che congiungono i punti M ed O. Le loro projezioni ef-

fettuate sulla medesima retta essendo equali, ed osservando che gli angoli, (N'',x), (N'',y), (N',x), (N',z), (N,y), (N,z) sono retti, e perciò i loro coseni sono nulli, immediatamente si ottengono le equazioni di trasformazione:

(3) $z\cos(N'',z)=X\cos(N'',X)+Y\cos(N'',Y)+Z\cos(N'',Z)$ projettando sopra ON''
$y\cos(N'y)=X\cos(N',X)+Y\cos(N',Y)+Z\cos(N',Z)$ » ON'
$x\cos(N,x)=X\cos(N,X)+Y\cos(N,Y)+Z\cos(N,Z)$ » ON

Corollario I. *Il primitivo sistema è ortogonale.* Le normali ON'', ON', ON coincidendo respettivamente coi primitivi assi delle z, delle y, delle x, gli angoli (N'',z), (N',y), (N,x) sono nulli: posto per brevità,

$$\cos(x,X)=a,\ \cos(x,Y)=b,\ \cos(x,Z)=c;\ \cos(y,X)=a',\ \cos(y,Y)=b',$$
$$\cos(y,Z)=c';\ \cos(z,X)=a'',\ \cos(z,Y)=b'',\ \cos(z,Z)=c''$$

le formule (3) divengono:

(4) $x=aX+bY+cZ,\ x=a'X+b'Y+c'Z,\ z=a''X+b''Y+c''Z.$

Poichè il sistema $Ozxy$ è ortogonale frai coseni di direzione a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'' dei nuovi assi hanno luogo le relazioni:

(5) $a^2+a'^2+a''^2=1,\ b^2+b'^2+b''^2=1,\ c^2+c'^2+c''^2=1.$

Corollario II. *Ambedue i sistemi coordinati sono ortogonali.* Avendo

$$\cos(X,Y)=ab+a'b'+a''b'',\ \cos(X,Z)=ac+a'c'+a''c'',$$
$$\cos(Y,Z)=bc+b'c'+b''c'',$$

oltre le relazioni (5) sussistono anche le tre seguenti:

(6) $ab+a'b'+a''b''=0,\ ac+a'c'+c''a''=0,\ bc+b'c'+b''c''=0.$

Dimodochè fra i nove coseni di direzione dovendo aver luogo sei

equazioni di condizione, solamente tre rimangono indeterminati.

Alle formule (5), (6) altre possono sostituirsi, in quanto che, essendo O Z X Y un sistema ortogonale, i primitivi assi e formano due a due angoli retti, e i loro coseni di direzione verificano condizioni simili alle precedenti. Laonde abbiamo:

$$(7) \qquad a^2+b^2+c^2=1, \quad a'^2+b'^2+c'^2=1, \quad a''^2+b''^2+c''^2=1$$

$$(8) \qquad a'a''+b'b''+c'c''=0, \quad a''a+b''b+c''c=0, \quad aa'+bb'+cc'=0.$$

Corollario III. Eliminando Y, Z fra le equazioni (4), si ottiene la

$$D.X=x(b'c'')+y(b''c)+z(bc'), \quad D=a(b'c'')+a'(b''c)+a''(bc'),$$

da cui si deducono le

$$a=(b'c''):D, \quad a'=(b''c):D, \quad a''=(bc'):D.$$

Sostituendo queste espressioni nella prima dalle formule (5), essa si trasforma nella

$$D^2=(b'c'')^2+(b''c)^2+(bc')^2,$$

la quale, aggiungendo e togliendo al suo secondo membro la quantità $b^2c'^2+b'^2c''^2+b''^2c^2$, diviene,

$$D^2=(b^2+b'^2+b''^2)(c^2+c'^2+c''^2)-(bc+b'c'+b''c'')^2,$$

ovvero per le (5) e (6),

$$(9) \qquad D^2=1, \quad \text{o} \quad D=\pm 1.$$

Per conseguenza si hanno le formule,

$$(10) \qquad a=\pm(b'c''), \quad a'=\pm(b''c), \quad a''=\pm(bc').$$

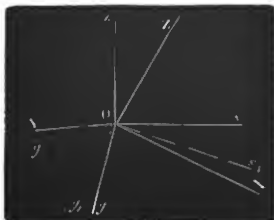
In simile modo operando si determinano pure le seguenti:

$$(11) \qquad b=\pm(c'a''), \quad b'=\pm(c''a), \quad b''=\pm(ca');$$

(12) $c=\pm(a'b''),\ c'=\pm(a''b),\ c''=\pm(ab')$.

Le relazioni (9), (10), (11) sono dovute a Lagrange.

11. Le formole di trasformazione n.° 10 che si adoperano nel caso in cui ambedue i sistemi di assi sono rettangolari contengono nove quantità, delle quali, sussistendo fra esse sei equazioni di condizione, tre sole rimangono indipendenti. Eulero, assumendo per determinare completamente la direzione dei nuovi assi tre angoli, stabilì formule involventi queste sole quantità. Indicando con $Oxyz$ il primitivo sistema di assi e con OXYZ il nuovo, con Ox_1 la retta d' intersezione dei piani xy, XY, Eulero scelse per definire il nuovo sistema — l'angolo, $xOx_1=\varphi$, che la Ox_1 forma col primitivo asse delle x, — l'angolo, $XOx_1=\psi$, che la Ox_1 forma col nuovo asse delle X — l' angolo, $ZOz=\theta$, compreso dal primitivo e dal nuovo asse delle z, che misura l' angolo diedro dei piani xy, XY.



Per effettuare la trasformazione, conviene. 1.° rimanendo fisso l'asse Oz, intorno a questo, far ruotare il dato sistema $Ozxy$ dell' angolo φ cioè fino a tanto che l' asse Ox coincida con Ox_1, ed esso prenda la posizione Ozx_1y_1, Oy_1 essendo normale ad Ox_1 nel piano xy, 2.° tenendo di poi fisso l'asse Ox_1 intorno a questo far ruotare il sistema Ozx_1y_1 dell'angolo θ cioè in modo che il primitivo asse delle z cada sul nuovo ed esso divenga OZy_2x_1, Oy_2 essendo normale ad Ox_1 nel piano XY, 3.° finalmente tenendo fisso l'asse OZ, intorno a questo far ruotare il sistema OZy_2x_1 dell' angolo ψ, cioè, facendo coincidere Ox_1 con OX e per conseguenza OZy_2x_1 col nuovo sistema OZYX. Nella prima rotazione dentro il piano xy si passa dagli assi ortogonali Oyx, agli altri pure orto-

gonali Oy_1x_1, mediante le formule:

(a) $$x = x_1 \cos\varphi - y_1 \operatorname{sen}\varphi,\quad y = x_1 \operatorname{sen}\varphi + y_1 \cos\varphi:$$

nella seconda, entro il piano zy_1 si cambiano gli assi Ozy_1 negli altri OZy_2, ambo rettangolari, per le formule:

(b) $$z = Z\cos\theta + y_2 \operatorname{sen}\theta,\quad y_1 = -Z\operatorname{sen}\theta + y_2 \cos\theta,$$

(θ essendo negativo per il senso in cui si effettua la rotazione) ed in fine nell'ultima entro il piano XY si mutano negli assi ortogonali OXY gli altri ortogonali Ox_1y_2, per le equazioni

(c) $$x_1 = X\cos\psi - Y\operatorname{sen}\psi,\quad y_2 = X\operatorname{sen}\psi + Y\cos\psi.$$

Eliminando fra le (a), (b), (c) le quantità sussidiarie x_1, y_1, y_2 si hanno le dimandate formule di trasformazione (1)

$$x = X(\cos\varphi\cos\psi - \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi) - Y(\cos\varphi\operatorname{sen}\psi + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\psi) + Z\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$$
$$y = X(\operatorname{sen}\varphi\cos\psi + \cos\theta\cos\varphi\operatorname{sen}\psi) - Y(\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi - \cos\theta\cos\varphi\cos\psi) - Z\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$$
$$z = X\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi + Y\operatorname{sen}\theta\cos\psi + Z\cos\theta.$$

Corollario. Confrontando le (1) con quelle (4) del n.° 10, i coseni di direzione dei nuovi assi relativamente ai primitivi sono espresei in funzione degli angoli φ, ψ, θ per le equazioni

$$a = \cos\varphi\cos\psi - \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi,\ b = -(\cos\varphi\operatorname{sen}\psi + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\psi),\ c = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$$
$$a' = \operatorname{sen}\varphi\cos\psi + \cos\theta\cos\varphi\operatorname{sen}\psi,\ b' = -(\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi - \cos\theta\cos\varphi\cos\psi),\ c' = -\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$$
$$a'' = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi,\quad b'' = \operatorname{sen}\theta\cos\psi,\quad c'' = \cos\theta.$$

12. Problema. *Trasformare un sistema di coordinate rettilinee ortogonali $Oxyz$ in un siitema di coordinate polari in cui il polo coincide colla origine O, l' asse polare coll' asse Ox, il piano direttore col piano xy.*

Sia M un punto dello spazio ed m la sua projezione sul piano xy: s' indichino le sue coordinate rettilinee con x, y, z e le po-

lari con ρ, θ, ψ, le projezioni di OM sull' asse coordinato Oz, e di Om sopra gli assi Ox, Oy respettivamente eguagliano z, x, y. Laonde (n° 7) abbiamo:

$$z=\rho\cos\theta,\quad Om=\rho\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\rho sen\theta,\quad x=Om\cos\psi,$$

$$y=Om\cos\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)=Om\, sen\psi,$$

ovvero

(1) $$z=\rho\cos\theta,\quad y=\rho sen\theta sen\psi,\quad x=\rho sen\theta\cos\psi.$$

Corollario. *Trasformare il sistema di coordinate polari in un sistema ortogonale di coordinate rettilinee avente la origine nel polo, per asse delle x l'asse polare, per piano delle xy il piano direttore.*

Elevando a quadrato le formule (1) ed addizionandole, poichè si ha (α) $y^2+x^2=\rho^2 sen^2\theta$ si ottiene per resultato $\rho^2=x^2+y^2+z^2$; dividendo la (α) per $z^2=\rho^2\cos^2\theta$, e la seconda delle (1) per la terza, derivano le $\frac{x^2+y^2}{z^2}=tang^2\theta$, $\frac{y}{x}=tang\psi$: di modo che le richieste formule di trasformazione sono:

(2) $$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ tang\theta=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z},\ \text{od}\ \cos\theta=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ tang\psi=\frac{y}{x}$$

Classificazione delle superficie.

13. *Le superficie si distinguono in* algebriche *ed in* trascendenti *secondo che le equazioni fra le coordinate variabili di un punto su di esse giacente sono algebriche o trascendenti.*

Teorema I. *Riferendo una superficie algebrica, a due diversi sistemi di assi, $Oxyz$, $O'XYZ$, le equazioni che la rappresentano hanno il medesimo grado.*

Infatti sia

$$(1) \qquad F(x, y, z)=0$$

l'equazione della superfice riferita a un sistema primitivo, e resa razionale ed intera abbia il grado eguale ad m. Notando con (α,β,γ) le coordinate di O′ si formano le equazioni rispetto al nuovo sistema di assi, sestituendo nella (1) ad x,y,z i loro valori dati dalle formule di trasformazione:

$$x=\alpha+hX+kY+lZ, \quad y=\beta+h'X+k'Y+l'Z, \quad z=\gamma+h''X+h''Y+l''Z.$$

Ma considerando la (1) come somma di termini della forma generale $Hx^ny^pz^q$, in cui $n+p+q \overline{\le} m$, la trasformata resulta parimente la somma di termini simili al seguente

$$H(\alpha+hX+kY+lZ)^n.(\beta+h'X+k'Y+l'Z)^p.(\gamma+h''X+k''Y+l''Z)^q,$$

ovvero a $\qquad KX^nY^pZ^q$;

in quanto chè, essendo n, p, q, numeri intieri e positivi, ogni suo fattore è un polinomio il cui grado non può respettivamente superare n, p, q: quindi il grado della trasformata non è maggiore di m. Ne questo può essere minore di m, poichè ritornando con inversa trasformazione dal nuovo al primitivo sistema, non può aumentare in questo passaggio il grado della equazione resultante.

Corollario. **Le superficie, a somiglianza delle curve, si dividono in ordini; e questi prendono nome dal grado della equazione che le esprimono.**

Teorema II. *Una superficie algebrica dell'ordine m è tagliata da un piano secondo una curva algebrica il cui grado non può superare m.*

La equazione della curva d'intersezione si determina riferendo la superficie ad un nuovo sistema di assi O′ZYX scelto per modo che abbia il piano dato per quello coordinato delle XY, e poi nella

equazione trasformata ponendo $Z=0$. Ma il grado di questa, Teorema I, è m e per conseguenza m o minore di m è il grado della equazione della curva d'intersezione che da essa deriva annullando una variabile.

Corollario. *Una superficie algebrica dell'ordine m è tagliata da una retta in m punti al più, se questa non giace interamente sulla superficie.*

Riferita la superficie al nuovo sistema di assi OXYZ in cui l'asse OZ coincide colla data retta nella equazione trasformata il cui grado è m si devono porre $Y=0$, $Z=0$; le radici della equazione resultante in X, di grado al più eguale ad m, determinano i punti d' intersezione, i quali perciò non superano in numero m. Se la retta giace sulla superficie la curva secondo cui questa è tagliata dal piano XY, non è una curva propria dell' ordine m, ma si compone della retta stessa e di una curva dell' ordine $(m-1)$.

Esercizi.

I. Dimostrare che in un poliedro l' area di una sua faccia eguaglia la somma delle aree di tutte le altre, ciascuna moltiplicata per il coseno dell' angolo d' inclinazione sulla prima faccia.

II. Dimostrare che in un poliedro la somma dei quadrati delle sue faccie eguaglia il doppio della somma dei prodotti di tutte queste, formati moltiplicandole due a due e per il coseno dell' angolo diedro ad esse corrispondente.

III. Dimostrare che in un tetraedro rettangolare il quadrato della faccia opposta all'angolo triedro trirettangolo è eguale alla somma dei quadrati delle altre tre faccie.

Questo Teorema è dovuto a De Gua.

IV. In un quadrilatero non piano, sghembo, diviso due lati

opposti nel rapporto $m:n$, e gli altri due nel rapporto $m_1:n_1$, le rette che congiungono i punti di divisione dei lati opposti si tagliano, ed i loro segmenti stanno nel medesimo rapporto dei lati opposti che li corrispondono.

V. In un sistema obliquangolo di assi determinare la distanza di due punti in funzione delle loro coordinate.

VI. In un sistema obliquangolo di assi determinare le coordinate del punto che divide, secondo un dato rapporto $m:n$, una lunghezza nota mediante le coordinate dei suoi punti estremi.

VII. Determinare le coordinate del centro di gravità di un triangolo in funzione delle coordinate dei suoi vertici.

VIII. Determinare le coordinate del centro di gravità di un tetraedro in funzione delle ooordinate dei suoi vertici.

IX. In un sistema obliquangolo di assi determinare la distanza di due punti mediante le loro coordinate.

X. Determinare la diagonale ed il volume di un parallelepipedo essendo dato tre costole adiacenti e gli angoli che esse comprendono.

XI. In un sistema obliquangolo di assi, determinare la relazione che deve aver luogo fra le linee trigonometriche degli angoli che una retta forma cogli assi.



CAPITOLO II.

DEL PIANO E DELLA RETTA

Varie forme della equazione del piano

14. Due processi inversi costituiscono il metodo generale con cui la Geometria analitica studia le proprietà della estensione figurata, dei quali il primo traducendo in analisi quelle proprietà delle linee, delle superficie che le caratterizzano ne stabilisce le equazioni, l'altro queste analizzando definisce il significato geometrico di cui sono suscettive.

Problema I. *Determinare la equazione di un piano relativamente a tre assi coordinati ortogonali.*

Una proprietà comune a tutti i punti di un piano, e solo a questi è la seguente: elevata nel punto A del piano sopra di esso una perpendicolare indefinita e su questa determinati due punti p, q ad eguale distanza da A, e perciò simmetricamente disposti rispetto al piano medesimo, ogni suo punto M è equidistante da p, q e per conseguenza le lunghezze Mp, Mq sono eguali.

Preso il punto A in modo che la perpendicolare pAq passi per la origine del sistema O, e preso pure O per il punto q, siano (x,y,z) le coordinate variabili del punto M del piano, e (a,b,c) quelle costanti di p. Le lunghezze Mp, MO sono date dalle espressioni

$$MO^2=x^2+y^2+z^2\,,\quad Mp^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$$

e perciò la equazione che analiticamente esprime la proprietà caratteristica del piano è

$$x^2+y^2+z^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2,$$

ovvero sviluppando e riducendo,

$$(1) \qquad ax+by+cz-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=0$$

equazione lineare in x,y,z.

Corollario I. Questo metodo fu immaginato da Fourrier.

Corollario II. In simil modo si ottiene l'equazione del piano relativamente ad assi obliquangoli.

Denotando con λ, μ, π, gli angoli compresi fra Oy ed Oz, Oz ed Ox, Ox ed Oy, abbiamo

$$MO^2=x^2+y^2+z^2+2yz\cos\lambda+2zx\cos\mu+2xy\cos\pi,$$

$$Mp^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+2(y-b)(z-c)\cos\lambda$$
$$+2(z-c)(x-a)\cos\mu+2(x-a)(y-b)\cos\pi;$$

pertanto l'equazione del piano è

$$(1') \quad (a+b\cos\pi+c\cos\mu)x+(b+c\cos\lambda+a\cos\pi)y+(c+b\cos\lambda+b\cos\mu)z$$
$$-\frac{a^2+b^2+c^2+2bc\cos\lambda+2ac\cos\mu+2ab\cos\pi}{2}=0.$$

Problema II. *Determinare il significato geometrico dell'equazione lineare*

$$(2) \qquad Ax+By+Cz+D=0,$$

x,y,z esprimendo le coordinate variabili di un punto nello spazio relativamente ad assi ortogonali.

Moltiplicando la (2) per una quantità arbitraria ρ essa si riduce alla forma (1) determinando le costanti ρ, a, b, c mediante

le equazioni

$$\rho A=a,\ \rho B=b,\ \rho C=c,\ \rho D=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$$

e quindi attribuendo loro i valori reali

$$(3)\ \rho=\frac{-2D}{A^2+B^2+C^2},\ a=\frac{-2DA}{B^2+A^2+C^2},\ b=\frac{-2DB}{A^2+B^2+C^2},\ c=\frac{-2DC}{A^2+B^2+C^2}.$$

Laonde la equazione (2) convenendo solo a punti nello spazio per cui ha luogo la proprietà caratteristica di un piano esprime questa superficie.

Corollario I. L'equazione (2) si può sempre trasformare nella (1') allorchè gli assi sono obliquangoli mediante le equazioni

$$\rho A=a+b\cos\pi+c\cos\mu,\ \rho B=b+c\cos\lambda+a\cos\pi,\ \rho C=c+b\cos\lambda+a\cos\mu$$

$$2\rho D=-(a^2+b^2+c^2+2bc\cos\lambda+2ac\cos\mu+2ab\cos\pi),$$

da cui si ottengono sempre per a, b, c, ρ valori reali.

Corollario II. La (2) nominasi equazione generale del piano e per assi rettangolari, e per assi obliquangoli. Conviene determinarne il significato o discuterla pei diversi valori che le costanti possono assumere.

I.° Sia $D=0$, la $Ax+By+Cz=0$ essendo soddisfatta da ($x=0$, $y=0$, $z=0$) coordinate della origine, il piano passa per questo punto.

II.° Sia $A=0$, la $By+Cz+D=0$ nel piano coordinato yz significa una retta, e nello spazio conviene a tutti i punti le cui projezioni ortogonali od oblique sopra yz giacciono in essa: quindi rappresenta un piano perpendicolare a quello coordinato delle yz o parallelo all' asse Ox. In simil modo $Ax+Cy+D=0$, $Ax+By+D=0$ esprimono piani rispettivamente perpendicolari ai piani zx, xy, o paralleli agli assi Oy, Oz.

III.° Se $A=0$, $B=0$, la $Cz+D=0$ significa (n.° 4) un piano

parallelo a quello coordinato delle xy: in simil modo per gli altri.

Corollario III. Indicando con δ la distanza dell' origine delle coordinate dal piano, $\delta = OA = \frac{1}{2}Op$, con $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ i suoi coseni di direzione, notando che a, b, c sono le projezioni di $Op = 2\delta$ sui tre assi ortogonali Ox, Oy, Oz, abbiamo:

$$(4) \qquad a = 2\delta\cos\alpha,\ b = 2\delta\cos\beta,\ c = 2\delta\cos\gamma,\ a^2 + b^2 + c^2 = 4\delta^2$$

Per questi valori l' equazione (1) prende la forma

$$(5) \qquad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \delta = 0$$

ed è chiamata forma *normale* della equazione del piano.

Eliminando per mezzo delle relazioni (3) (4) le arbitrarie a, b, c, si deducono le formule:

$$(6) \qquad \delta = \frac{-D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},\quad \cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},\quad \cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

per le quali si determinano, e la la distanza del piano dall' origine, e la sua direzione in funzione delle costanti dell' equazione generale (2). Questa poi immediatamente si trasforma nella (5) moltiplicandone ogni termine per il fattore, $\frac{-1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, in cui al radicale deve attribuirsi il segno opposto a quello della costante D in quanto che la perpendicolare δ si considera sempre come grandezza positiva. Inoltre gli angoli γ, β, α eguagliano gli angoli rettilinei che misurano i diedri formati dal piano con ciascuno dei piani coordinati xy, zx, zy: e sono complementari degli angoli che il piano forma coi tre assi Oz, Oy, Ox.

Corollario IV. *Presi tre punti* $M_1(x_1y_1z_1)$, $M_2(x_2y_2z_2)$, $M_3(x_3y_3z_3)$

in un piano, determinarne la equazione in guisa che le costanti siano espresse in funzione delle loro coordinate.

Denotando con A l' area del triangolo $M_1M_2M_3$, e con V il volume della piramide triangolare $OM_1M_2M_3$, moltiplicando ogni termine della equazione (5) per A, si ottiene:

$$(7) \qquad x.A\cos\alpha + y.A\cos\beta + z.A\cos\gamma = \delta.A.$$

Ma $A\cos\alpha$, $A\cos\beta$, $A\cos\gamma$ sono le proiezioni A_x, A_y, A_z di A sui piani coordinati zy, zx, xy, e $\frac{1}{3}.\delta.A$ è il volume della piramide $OM_1M_2M_3$; per conseguenza la equazione (7) diviene:

$$(8) \qquad xA_x + yA_y + zA_z = 3V,$$

in cui i coefficienti hanno espressioni che si deducono dalle (4) del n.° 8.

Corollario IV. *Esprimere la equazione del piano mediante i segmenti p, q, r che respettivamente determina sui tre assi coordinati ortogonali Ox, Oy, Oz.*

Projettando ciascuo di questi sulla perpendicolare δ abbassata dalla origine sul piano abbiamo $\delta = p\cos\alpha$, $\delta = q\cos\beta$, $\delta = r\cos\gamma$; donde introducendo i valori di $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ nella (5) si deduce

$$(9) \qquad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} - 1 = 0,$$

ove per la (6),

$$(10) \qquad p = -\frac{D}{A}, \quad q = -\frac{D}{B}, \quad r = -\frac{D}{C}.$$

Le rette secondo cui il piano è intersecato dai piani coordinati nominansi sue tracce. Allorchè esso è espresso mediante l' equazione generale ne resultano per le equazioni delle tracce:

$$Ax+By+D=0,\ Ax+Cz+D=0,\ By+Cz+D=0$$

nei piani xy, zx, zy.

Per assi obliquangoli, esprimendo le costanti A, B, C, D per p, q, r, si stabilisce direttamente la equazione (9).

Problemi intorno ai piani.

15. Problema I. *Avendo il piano rappresentato, per assi ortogonali, dalla equazione*

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - \delta = 0\,,$$

esprimere la lunghezza della perpendicolare su di esso abbassata dal punto $M(x_1 y_1 z_1)$.

Sia P il piede della perpendicolare condotta da M, sul piano dato p quello della perpendicolare che si parte dalla origine O, e sia Q la projezione di O sopra la MP: avendo $PQ=pO$, come rette le quali sono comprese in un medesimo piano, e sono parallele tagliate da parallele, posto $MP=P$, evidentemente abbiamo $MQ=-P+\delta$. Projettando la linea poligonale $x_1+y_1+z_1$ i cui punti estremi sono O ed M sopra la MPQ la sua projezione eguaglia MQ: ma $x_1 \cos \alpha$, $y_1 \cos \beta$, $z_1 \cos \gamma$ essendo le projezioni delle rette che compongono la poligonale, si ottiene la espressione

$$x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma = -P + \delta\,, \text{ ovvero}$$

$$(1) \qquad -P = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - \delta.$$

Considerando sempre positiva la distanza ortogonale della origine del sistema dal piano, qualunque situazione abbia, la perpendicolare MP deve essere presa positiva o negativa secondo che M giace con O dalla medesima parte del piano, o dalla parte opposta.

Corollario. Se il piano è dato dalla sua equazione generale, per le (6) n.° 14, tale espressione si trasforma nella seguente:

$$(2)\qquad -P=\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Problema II. *Avendo i piani rappresentati, per assi ortogonali, dalle equazioni*

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-\delta=0,\quad x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1-\delta_1=0,$$

determinare la espressione analitica dell'angolo che racchiudono.

Osservando che l'angolo Θ formato dalle due normali δ, δ_1 è l'angolo rettilineo che misura il diedro dei piani dati, abbiamo per esso, n.° 6,

$$(3)\qquad \begin{aligned}&\cos\Theta=\cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1,\\ &\operatorname{sen}\Theta=\sqrt{(\cos\alpha\cos\beta_1)^2+(\cos\beta\cos\gamma_1)^2+(\cos\gamma\cos\alpha_1)^2}.\end{aligned}$$

Corollario I. Se i piani sono dati dalle loro equazioni generali $Ax+By+Cz+D=0$, $A'x+B'y+C'z+D'=0$, le (3) divengono,

$$(4)\qquad \begin{aligned}&\cos\Theta=\frac{AA'+BB'+CC'}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\pm\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},\\ &\operatorname{sen}\Theta=\frac{\sqrt{(AB')^2+(BC')^2+(CA')^2}}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\pm\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.\end{aligned}$$

Corollario II. *Determinare la condizione per cui i piani sono tra loro perpendicolari.* Dovendo essere $\Theta=90°$, $\cos\Theta=0$, dalle (3), (4) immediatamente si deduce:

$$(5)\qquad \cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1=0,\quad AA'+BB'+CC'=0.$$

Corollario III. *Determinare le condizioni per cui i piani sono tra loro paralleli.* In questo caso poichè $\Theta=0$, $\operatorname{sen}\Theta=0$, per le (3), (4), si ottengono le

$$(\cos\alpha\cos\beta_1)=0,\ (\cos\beta\cos\gamma_1)=0,\ (\cos\gamma\cos\alpha_1)=0\ ;\ \text{ovvero}$$
$$(AB')=0,\ (BC')=0,\ (CA')=0\ ;$$

le quali ricevono anche la forma:

(6) $\cos\alpha:\cos\alpha_1=\cos\beta:\cos\beta_1=\cos\gamma:\cos\gamma_1$; $A:A'=B:B'=C:C'$,

e sono due sole, poichè combinandone due qualunque nasce la terza. Laonde *due piani sono paralleli quando hanno proporzionali i coefficienti delle variabili nelle equazioni da cui sono espressi.*

Problema III. *Determinare l'equazione di un piano che sia parallelo ad un piano dato* $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-\delta=0$, *e che passi per un punto dato* $(x_1 y_1 z_1)$.

Prendendo l'equazions $x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1-\delta_1=0$ per significare il piano dimandato, fra le sue costanti arbitrarie $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$, δ_1, affinchè esso soddisfi alle date condizioni, devono avere luogo le

$$x_1\cos\alpha_1+y_1\cos\beta_1+z_1\cos\gamma_1-\delta_1=0,\quad \cos\alpha:\cos\alpha_1=\cos\beta:\cos\beta_1=\cos\gamma:\cos\gamma_1:$$

quindi eliminando le arbitrarie si ottiene per esso la

(7) $$(x-x_1)\cos\alpha+(y-y_1)\cos\beta+(z-z_1)\cos\gamma=0.$$

Corollario. So il piano dato in situazione, è simboleggiato dalla equazione generale $Ax+By+Cz+D=0$, quello richiesto viene espresso dalla

(8) $$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$$

Problema IV. *Determinare le equazioni dei piani i quali bisecano gli angoli diedri dei piani,*

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-\delta=0,\quad x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1-\delta_1=0,$$

e sono condotti per la retta secondo cui i piani dati si tagliano.

La proprietà caratteristica di un piano che passa per la co-

stola di un angolo diedro bisecandolo è d' avere ogni suo punto (xyz) ad eguale distanza dalle faccie di questo. Però l' origine del sistema giacendo entro uno degli angoli diedri formati da due piani ed esternamente al diedro con quello supplementario, è sempre dalla medesima parte delle due faccie del primo diedro con ogni punto del suo piano bissettore, ed è relativamente al secondo diedro dalla stessa parte per una sua faccia, dalla parte opposta per l'altra con ogni punto del piano che lo biseca: quindi, Problema I le equazioni

$$(9)\quad (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-\delta)\mp(x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1-\delta_1)=0,$$

che sono evidentemente soddisfatte da tutti i punti posti sulla retta di intersezione dei piani dati, esprimono i piani bissettori richiesti. Designando l'equazione dei piani dati con una sola lettera $u=0$, $u_1=0$, alla (9) si può dare la forma algoritmica

$$(10)\qquad u\mp u_1=0.$$

Corollario. L'equazione (9), allorchè i piani hanno per equazioni le

$$Ax+By+Cz+D=0,\ A'x+B'y+C'z+D'=0$$

divengono:

$$(11)\qquad \frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\mp\frac{A'x+B'y+C'z+D'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}=0.$$

Problema V. *Dati quattro punti nello spazio*

$$M(x_1y_1z_1),\ M_1(x_2y_2z_2),\ M_2(x_3y_3z_3),\ M_3(x_4y_4z_4)$$

determinare l'analitica condizione affinchè siano contenuti in un medesimo piano.

Il piano determinato dai tre punti M, M_1, M_2 ha per equazione, $xA_x+yA_y+zA_z=3V$: quindi la condizione affinchè il quarto punto sia in esso contenuto è

(12) $$x_4A_x+y_4A_y+z_4A_z=3V.$$

A tale condizione si perviene notando come il volume della piramide triangolare i cui vertici sono i punti dati debba essere nullo e che perciò debba sussistere la relazione

(13) $$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}=0$$

la quale, sviluppata, immediatamente si trasforma nella precedente.

Equazioni della retta.

16. Una retta nello spazio è definita mediante due equazioni lineari fra le coordinate variabili di un suo punto poichè si può considerare come la linea di intersezione dei due piani cui ogni singola equazione rappresenta. Infatti le coordinate di ogni punto appartenente a tale intersezione nel medesimo tempo soddisfano ambedue le equazioni ed inversamente tutti i sistemi di coordinate che queste verificano sono proprie a punti che giacciono sopra di essa.

Problema. *Determinare le equazioni di una retta relativamente a tre assi coordinati ortogonali.*

Siano (a,b,c) le coordinate di un punto dato A giacente sulla retta, (x,y,z) quelle di un punto qualunque M di essa, ρ sia la distanza variabile MA, e $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$, siano i suoi coseni di direzione, projettando AM sopra i tre assi coordinati, immediatamente si stabiliscono le equazioni,

(1) $$x-a=\rho\cos\alpha,\quad y-b=\rho\cos\beta,\quad z-c=\rho\cos\gamma$$

le quali esprimono la retta mediante le quattro variabile ρ, x, y, z.

Eliminando fra di esse ρ si deducono le tre equazioni

$$(2) \qquad \frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}$$

che equivalgono a due sole in quanto che una è delle altre conseguenza.

Corollario I. Combinando insieme la prima colla terza, la seconda colla terza, posto

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}=p, \quad a-\frac{c\cos\alpha}{\cos\gamma}=q, \quad \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}=p_1, \quad b-\frac{c\cos\beta}{\cos\gamma}=q_1,$$

si ottengono a rappresentare la retta le due equazioni:

$$(3) \qquad x=pz+q, \quad y=p_1z+q_1$$

che sono frequentemente adoperate.

La prima di esse esprime nel piano xz una retta, projezione della data su questo piano; l'altra la sua projezione sul piano zy.

Corollario II. Le equazioni

$$(4) \qquad \frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}=\rho$$

per assi coordinati obliquangoli, esprimono una retta, rappresentando la linea d'intersezione di due piani. Inoltre le costanti l, m, n significano i rapporti delle projezioni sugli assi di una porzione arbitraria ρ della retta, a questa medesima porzione, projezioni effettuate da piani paralleli a quelli coordinati

Inoltre essendo

$$\lambda=yOz, \quad \mu=zOx, \quad \pi=xOy, \text{ ed}$$

$$\rho^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+2(y-b)(z-c)\cos\lambda+$$
$$+2(z-c)(x-a)\cos\mu+2(x-a)(y-b)\cos\pi,$$

eliminandovi $(x-a)$, $(y-b)$, $(z-c)$ mediante le (4) si ottiene fra tali costanti la relazione

(5) $$1=l^2+m^2+n^2+2mn\cos\lambda+2nl\cos\mu+2lm\cos\pi,$$

Corollario III. *Determinare in qual modo vari la situazione di una retta nello spazio per particolari valori delle costanti involute nelle sue equazioni,* $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$, *$l$, m, n essendo quantità proporzionali ai suoi coseni di direzione se gli assi sono ortogonali.*

I.° Siano $a=b=c=0$, il punto A coincidendo coll'origine O del sistema di assi, per questo passa la retta le cui equazioni sono

(6) $$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}.$$

II.° Sia $l=0$, affinchè le equazioni (4) sussistano è necessario e sufficiente che il rapporto $\frac{x-a}{l}$ non sia infinito, ma indeterminato; il che ha luogo ponendo $x=a=0$. Pertanto le due equazioni

(7) $$x=a,\ \frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$$

esprimono una retta contenuta in un piano parallelo al piano coordinato zy, e perciò a questo parallela. In simil modo le equazioni

$$y=b,\ \frac{x-a}{l}=\frac{z-c}{n};\ z=c,\ \frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}$$

significano rette parallele ai piani coordinati zx, xy.

III.° Siano $l=m=0$, i rapporti $\frac{x-a}{l}$, $\frac{y-b}{m}$ non potendo essere infiniti, devono divenire indeterminati e perciò le equazioni

(8) $$x=a,\ y=b$$

esprimono una retta, che essendo intersezione di due piani respettivamente paralleli a zy, zx resulta parallela all'asse coordinato Oz. Parimente le equazioni $x=a$, $z=c$; $y=b$, $z=c$ significano rette parallele agli assi Oy, Ox.

Problemi intorno alle rette

17. Problema I. *Determinare le equazioni di una retta che passa per due punti dati* $M(x_1 y_1 z_1)$, $M(x_2 y_2 z_2)$ *gli assi coordinati essendo qualunque.*

Siano le equazioni della retta.

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n},$$

in cui le costanti arbitrarie a, b, c, l, m, n, devono esprimersi in funzione delle coordinate dei punti dati. Essendo le quantità a, b, c le coordinate di un qunto qualunque A che giace sulla retta, affinchè questa passi per il primo punto M è sufficiente porre, $a=x_1$, $b=y_1$, $c=z_1$, o far coincidere A con M. Allora le sue equazioni divengono:

$$(1)\qquad \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}.$$

Ma il punto M_1 giacendo sulla retta, devono aver luogo le condizioni $\frac{x_2-x_1}{l}=\frac{y_2-y_1}{m}=\frac{z_2-z_1}{n}$, per cui eliminando dalla (1) le costanti arbitrarie si hanno le richieste equazioni:

$$(2)\qquad \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Corollario I. Le equazioni (2) valgono anche quando gli assi

coordinati sono ortogonali.

Corollario II. *Esprimere analiticamente le condizioni per cui i tre punti dello spazio* $M(x_1 y_1 z_1)$, $M_1(x_2 y_2 z_2)$, $M_2(x_3 y_3 z_3)$ *sono sopra una medesima retta.* Formate le equazioni (2) della retta MM_1, le coordinate del terzo M_2 devono soddisfarle e perciò si deve avere:

$$(3) \qquad \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1},$$

condizioni richieste. Queste si riducono a due, una essendo necessaria conseguenza delle altre. Con differente processo si può ad esse pervenire. Denotando con A l'area del triangolo MM_1M_2, abbiamo $A^2=A_x^2+A_y^2+A_z^2$: ma in questo caso $A=0$, quindi le condizioni che gli corrispondono sono n.° 9,

$$(4) \qquad A_x=A_y=A_z=0,$$

le quali facilmente si riducono alle precedenti.

Problema II. *Esprimere analiticamente la condizione necessaria affinchè due rette date in situazione nello spazio s' intersechino.*

Siano

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}, \qquad \frac{x-a'}{l'}=\frac{y-b'}{m'}=\frac{z-c'}{n'}$$

le equazioni delle rette date, $A(a,b,c)$, $B(a+l,b+m,c+n)$ siano due punti presi sulla prima, $A'(a'b'c')$, $B'(a'+l', b'+m', c'+n')$ due punti sull' altra, la condizione richiesta è quella necessaria affinchè le rette siano contenute in un medesimo piano, ovvero la piramide triangolare $ABA'B'$ abbia un volume nullo. Quindi è

$$(5)\begin{vmatrix} 1, & a, & b, & c \\ 1, & a+l, & b+m, & c+n \\ 1, & a', & b', & c' \\ 1, & a'+l', & b'+m', & c'+n' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1, & a, & b, & c \\ 0, & l, & m, & n \\ 1, & a', & b', & c' \\ 0, & l', & m', & n' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-a', & b-b', & c-c' \\ l, & m, & n \\ l', & m', & n' \end{vmatrix}=0$$

Corollario. Se le rette sono date dalle equazioni $x=pz+q$, $y=p_1z+q_1$; $x=p'z+q'$, $y=p'_1z+q_1'$, la condizione enunciata si determina eliminando fra esse le variabili x, y, z perchè per le coordinate del punto d'intersezione tali equazioni debbono coesistere. Pertanto abbiamo

$$(6)\qquad (p-p')(q_1-q_1')=(p_1-p_1')(q-q');$$

e per le coordinate del punto d'intersezione si deducono i valori

$$(7)\qquad z=\frac{q'-q}{p-p'}=\frac{q_1'-q_1}{p_1-p_1'},\quad x=\frac{(pq')}{p-p'},\quad y=\frac{(p_1q_1')}{p_1-p_1'}.$$

Problema III. *Esprimere gli angoli che una retta forma cogli assi coordinati ortogonali.*

Sia la retta data dalle equazioni $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$, siano $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ i suoi coseni di direzione, e sia r il segmento della retta compreso fra i punti (x,y,z), (a,b,c), abbiamo,

$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}=r$, e perciò $l=r\cos\alpha$, $m=r\cos\beta$, $n=r\cos\gamma$.

Inalzandole a quadrato ed addizionandole membro a membro si trova, $l^2+m^2+n^2=r^2$, e in fine

$$(8)\quad \cos\alpha=\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\quad \cos\beta=\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\quad \cos\gamma=\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

È da notare come ciascuna di queste espressioni ammetta due valori per cagione del radicale che contiene il quale però in tutte deve avere il medesimo segno. Esistono adunque due sistemi di valori per i coseni, che determinano e gli angoli α, β, γ ed i loro supplementari $180^0-\alpha$, $180^0-\beta$, $180^0-\gamma$, angoli che due porzioni della retta misurata da un punto qualunque di essa in opposte direzioni fermano coi rami positivi degli assi. Per il modo di

contare gli angoli α, β, γ vale la convenzione che *essi sono quelli corrispondenti alla porzione della retta che forma col ramo positivo dell'asse* Oz *un angolo acuto.* Dovendo in conseguenza assumere per $\cos\gamma$ un valore positivo il radicale prende il segno eguale a quello della costante n.

Corollario I. Se la retta è simboleggiata dalle equazioni, $x=pz+q$, $y=p_1z+q_1$, o dalle $\frac{x-q}{p}=\frac{y-q_1}{p_1}=\frac{z}{1}$, i suoi coseni di direzione sono dati dalle espressioni:

$$(9)\quad \cos\alpha=\frac{p}{\sqrt{1+p^2+p_1^2}},\quad \cos\beta=\frac{p_1}{\sqrt{1+p^2+p_1^2}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+p_1^2}},$$

in cui il radicale deve essere affetto del segno positivo.

Corollario II. Essendo λ, μ, π gli angoli che la retta data forma coi piani coordinati xy, xz, yz, o colle sue projezioni effettuate su tali piani immediatamente abbiamo

$$(10)\qquad sen\lambda=\cos\gamma,\quad sen\mu=\cos\beta,\quad sen\pi=\cos\alpha.$$

Corollario III. *Determinare le equazioni di una retta la quale passa per il punto dato* ($x_1y_1z_1$) *e forma cogli assi gli angoli* α, β, γ. Per le (1) abbiamo

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma}\quad\text{ovvero}\quad \frac{x-x_1}{z-z_1}=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},\quad \frac{y-y_1}{z-z_1}=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Problema IV. *Esprimere l'angolo compreso fra due rette date e riferite ad assi ortogonali.*

Essendo $(a)\ \frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n},\quad \frac{x-a'}{l'}=\frac{y-b'}{m'}=\frac{z-c'}{n'}$

le equazioni delle due rette, Θ l'angolo che esse comprendono, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ i coseni di direzione della prima, $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ quelli dell'altra per le formule (5) del numero n.° 7, abbiamo

$$\cos\Theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma',$$
$$\operatorname{sen}\Theta = \sqrt{(\cos\beta\cos\gamma')^2 + (\cos\gamma\cos\alpha')^2 + (\cos\alpha\cos\beta')^2}$$

le quali per le (8) divengono:

$$(11)\qquad \cos\Theta = \frac{ll'+mm'+nn'}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\,.\,\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}$$

$$(12)\qquad \operatorname{sen}\Theta = \frac{\sqrt{(mn')^2+(nl')^2+(lm')^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}\,.$$

I due valori eguali e di segno contrario che si hanno dalla (11) per il $\cos\Theta$ corrispondono a due angoli supplementari, acuto od ottuso, che le rette comprendono. I due valori che si hanno per il seno corrispondono ad archi che differiscono di una semicirconferenza, di π. Limitandosi a considerare archi minori di π, il valore di $\operatorname{sen}\Theta$ (12) deve sempre esser preso positivo.

Corollario I. Le rette essendo rappresentate dalle equazioni:

$$(b)\qquad x=px+q,\ y=p_1x+q_1;\ x=p'x+q',\ y=p_1'x+q_1'$$

le (11) e (12) si trasformano nelle

$$(13)\qquad \cos\Theta = \frac{pp'+p_1p_1'+1}{\sqrt{1+p^2+p_1^2}\,.\,\sqrt{1+p'^2+p_1'^2}}$$

$$(14)\qquad \operatorname{sen}\Theta = \frac{\sqrt{(p_1-p_1')^2+(p'-p)^2+(pp_1')^2}}{\sqrt{1+p^2+p_1^2}\,.\,\sqrt{1+p'^2+p_1'^2}}\,.$$

Corollario II. *La condizione affinchè le rette* (*a*) *siano scambievolmente perpendicolari* è, per $\Theta=90^0$ e $\cos\Theta=0$,

$$(15)\qquad ll'+mm'+nn'=0.$$

Questa, allorchè le rette, sono date dalle (*b*), diviene

(16) $$pp'+p_1p'_1+1=0.$$

Corollario III. *Le condizioni affinchè le rette, (a) o (b), siano parallele*, si derivano dalle (12), (14) ponendovi $\Theta=0$ e sono:

(17) $$\frac{l}{l'}=\frac{m}{m'}=\frac{n}{n'} \text{ ovvero}$$

(18) $$\frac{p}{p'}=\frac{p_1}{p_1'}=1,$$

le quali si riducono sempre a due la terza essendo di esse necessaria conseguenza.

Corollario IV. *Determinare le equazioni di una retta che passa per il punto* $(x_1y_1z_1)$ *ed è parallela alla retta* $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$.

Per i principi sopra espressi esse evidentemente sono

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}.$$

Problemi intorno ai piani e alle rette.

18. Problema I. *Esprimere l'angolo di inclinazione di un retta ad un piano ambedue riferiti ad un sistema ortogonale di assi.*

Siano

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-\delta=0;\quad \frac{x-a}{\cos\alpha'}=\frac{y-b}{\cos\beta'}=\frac{z-c}{\cos\gamma'},$$

le equazioni del piano e della retta, sia V l'angolo che questa forma col piano, poichè V è complementario coll'angolo compreso fra la retta data e la direzione di δ, abbiamo

(1) $$\operatorname{sen}V=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma',$$

(2) $$\cos^2V=(\cos\beta\cos\gamma')^2+(\cos\gamma\cos\alpha')^2+(\cos\alpha\cos\beta')^2.$$

Corollario I. Se il piano e la retta sono rappresentati dalle equazioni

$$Ax+By+Cz+D=0\,,\quad \frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}\,,$$

le formule (1), (2) divengono

$$(3)\qquad sen\,V=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,.\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

$$(4)\qquad cos^2V=\frac{(Bn-Cm)^2+(Cl-An)^2+(Am-Bl)^2}{(A^2+B^2+C^2)\,.\,(l^2+m^2+n^2)}\,.$$

Corollario II. *Determinare le equazioni di condizione che devono sussistere fra le costanti della retta e del piano affinchè a questo sia essa perpendicolare.* Dovendo essere $V=90°$, dalle (2), (4) si traggono immediatamente le relazioni

$$(5)\qquad \frac{cos\alpha}{cos\alpha'}=\frac{cos\beta}{cos\beta'}=\frac{cos\gamma}{cos\gamma'}\,,\quad \frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}\,,$$

le quali si riducono a due sole la terza derivandone come necessaria conseguenza. Laonde le equazioni di una retta condotta per il punto (x_1, y_1, z_1) perpendicolare al piano $Ax+By+Cz+D=0$ evidentemente sono

$$(6)\qquad \frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}:$$

e la equazione di un piano che passa per il punto dato ed è perpendicolare alle retta $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$ ha la forma

$$(7)\qquad l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(y-y_1)=0.$$

Corollario III. *Determinare la equazione di condizione che deve sussistere fra le costanti della retta e del piano affinchè essa sia*

a questo parallela. Essendo V=0, dalle (1), (3) si deducono le relazioni,

(8) $\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'=0$, $Al+Bm+Cn=0$.

Problema II. *Determinare le conrdinate del punto d'intersezione di una retta con un piano, gli assi coordinati essendo qualunque.*

Siano

$$Ax+By+Cz+D=0,\quad \frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$$

le equazioni della retta e del piano dati: eliminando fra di esse successivamente le x, y; x, z; y, z si hanno per le coordinate del punto d' intersezione le espressioni:

$$(9)\quad z-c=-\frac{n(Aa+Bb+Cc+D)}{Al+Bm+Cn},\quad y-b=-\frac{m(Aa+Bb+Cc+D)}{Al+Bm+Cn},$$
$$x-a=-\frac{l(Aa+Bb+Cc+D)}{Al+Bm+Cn}.$$

Corollario I. *La condizione necessaria affinchè la retta sia parallela al piano* si determina notando come il punto d'intersezione è in questo caso all'infinito, e perciò i valori delle sue coordinate debbono divenire maggiori di ogni quantità assegnabile. Essa è adunque:

$$(10)\qquad Al+Bm+Cn=0.$$

Le condizioni necessarie affinchè la retta sia contenuta nel piano si hanno osservando come i valori (9) per le coordinate del loro punto d' intersezione debbono essere indeterminate: quindi esse sono

$$(11)\qquad Al+Bm+Cn=0,\ Aa+Bb+Cc+D=0.$$

Se la retta è rappresentata dalle equazioni $x=pz+a$,

$y=qz+b$, le (10), (11) si trasformano nelle

$$(12) \qquad Ap+Bq+C=0\,;\; Ap+Bq+C=0\,,\; Aa+Bb+D=0.$$

Corollario II. *Determinare la equazione del piano che passa per il punto* (x_1, y_1, z_1) *e per la retta* $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$. Assumendo per il piano richiesto l'equazione $Ax+By+Cz+D=0$, le costanti arbitrarie A, B, C, D si ottengono mediante le equazioni di condizione (11) e $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$. Fra queste eliminando le arbitrarie si perviene alla equazione resultante

$$(13) \quad x\Big[m(z_1-c)-n(y_1-b)\Big]+y\Big[n(x_1-a)-l(z_1-c)\Big]$$
$$+z.\Big[l(y_1-a)-m(x_1-a)\Big]=0.$$

che esprime il piano richiesto.

Se la retta data è simboleggiata dalle equazioni: $x=pz+a$, $y=qz+b$ la (13) diviene

$$(14) \quad x\Big[qz_1-y_1+b\Big]+y\Big[x_1-a-pz_1\Big]+z\Big[p(y_1-b)-q(x_1-a)\Big]=0.$$

Corollario III. *Daterminare la equazione del piano condotto per la retta* $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$ *parallelamente alla seconda retta,* $\frac{x-a'}{l'}=\frac{y-b'}{m'}=\frac{z-c'}{n'}$. Essendo $Ax+By+Cz+D=0$ l'equazione del piano, da questa debbonsi eliminare le costanti arbitrarie per mezzo delle relazioni (11) e $Al'+Bm'+Cn'=0$ Quindi per esso si ottiene

$$(15) \qquad (x-a)(mn')+(y-b)(nl')+(z-c)(lm')=0.$$

Se le rette sono date dalle equazioni

$$x=pz+a,\ y=qz+b;\ x=p'z+a',\ y=q'z+b',$$

lo (12) si cambia nella equazione

(16) $$(x-a)(q-q')+(y-b)(p-p')+z(pq'-p'-q)=0.$$

19. Problema I. *Determinare la distanza di un punto dato da una retta parimente data nello spazio, gli assi essendo ortogonali.*

Siano (x_1, y_1, z_1) le coordinate del punto dato P, ed $\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}$ le equazioni della retta datà mediante il punto fisso A (a, b, c) preso su di essa, e mediante i coseni $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ che ne definiscono la direzione, s' indichi con B il piede della perpendicolare abbassata da P su questa retta, allora x_1-a, y_1-b, z_1-c esprimono le projezioni di AP respettivamente sugli assi Ox, Oy, Oz, ed $(x_1-a)\cos\alpha$, $(y_1-b)\cos\beta$, $(z_1-c)\cos\gamma$ quelle di ciascuna di esse sulla retta AB ed

$$(x_1-a)\cos\alpha+(y_1-b)\cos\beta+(z_1-c)\cos\gamma$$

la projezione di AP sopra AB e perciò AB. Laonde abbiamo:

$$AB=(x_1-a)\cos\alpha+(y_1-b)\cos\beta+(z_1-c)\cos\gamma,\quad AP^2=(x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2,$$

e perciò

(1) $$PB^2=AP^2-AB^2=(x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2 -\Big[(x_1-a)\cos\alpha+(y_1-b)\cos\beta+(z_1-c)\cos\gamma\Big]^2.$$

A questa espressione si può dare forma differente, notando come la

$$PB^2=\Big[(x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2\Big](\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma) -\Big[(x_1-a)\cos\alpha+(y_1-b)\cos\beta+(z_1-c)\cos\lambda\Big].^2$$

sviluppando si trasforma nella

$$(2)\quad PB^2=\left[\cos\gamma(x_1-a)-\cos\alpha(z_1-c)\right]^2+\left[\cos\alpha(y_1-b)-\cos\beta(x_1-a)\right]^2$$
$$+\left[\cos\beta(z_1-c)-\cos\gamma(y_1-b)\right]^2.$$

Se la retta è data dalle equazioni

$$(a)\qquad \frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n},$$

ovvero dalle $x=az+p$, $y=bz+q$, le espressioni (1), (2) divengono

$$(3)\quad PB^2=(x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2-\frac{\left[l(x_1-a)+m(y_1-b)+n(z_1-c)\right]^2}{l^2+m^2+n^2}$$

$$PB^2=(x_1-p)^2+(y_1-q)^2+z_1^2-\frac{\left[a(x_1-p)+b(y_1-q)+z_1\right]^2}{a^2+b^2+1}$$

$$(4)\quad PB^2=\left[\Big(n(x_1-a)-l(z_1-c)\Big)^2+\Big(l(y_1-b)-m(x_1-a)\Big)^2\right.$$
$$\left.+\Big(m(z_1-c)-n(y_1-b)\Big)^2\right]:(l^2+m^2+n^2).$$

$$PB^2=\left[\Big(x_1-p-az_1\Big)^2+\Big(a(y_1-q)-b(x_1-p)\Big)^2+\Big(bz_1-y_1+q\Big)^2\right]$$
$$:(a^2+b^2+1).$$

Corollario. *Determinare le coordinate del piede* B (x', y', z') *della perpendicolare condotta dal punto dato* P *sopra la data retta* AB.

Essendo $x'-a$, $y'-b$, $z'-c$ le projezioni di AB sopra gli assi abbiamo:

$$x'-a=AB\cos\alpha,\quad y'-b=AB\cos\beta,\quad z'-c=AB\cos\gamma,$$

ed eliminandovi AB,

$$(5)\qquad x'=a+\cos\alpha\Big((x_1-a)\cos\alpha+(y_1-b)\cos\beta+(z_1-c)\cos\gamma\Big),$$

$$y'=b+\cos\beta\Big((x_1-a)\cos\alpha+(y_1-b)\cos\beta+(z_1-c)\cos\gamma\Big),$$

$$z_1=c+\cos\gamma\Big((x_1-a)\cos\alpha+(y_1-b)\cos\beta+(z_1-c)\cos\gamma\Big);$$

e se le rette sono espresse dalle equazioni (a) tali valori divengono

$$(6)\qquad x_1=a+\frac{l\Big[\,l(x_1-a)+m(y_1-b)+n(z_1-c)\Big]}{l^2+m^2+n^2},$$

$$y'=b+\frac{m\Big[\,l(x_1-a)+m(y_1-b)+n(z_1-c)\Big]}{l^2+m^2+n^2},$$

$$z'=c+\frac{n\Big[\,l(x_1-a)+m(y_1-b)+n(z_1-c)\Big]}{l^2+m^2+n^2}$$

$$(7)\qquad x'=p+\frac{a\Big[a(x_1-p)+b(y_1-b)+z_1\Big]}{a^2+b^2+1},$$

$$y'=q+\frac{b\Big[a(x_1-p)+b(y_1-q)+z_1\Big]}{a^2+b^2+1}.\qquad z'=\frac{a(x_1-p)+b(y_1-q)+z_1}{a^2+b^2+1}$$

Problema II. *Determinare la minima distanza di due rette nello spazio, gli assi essendo ortogonali.*

Siano $\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}$, $\frac{x-a'}{\cos\alpha}=\frac{y-b'}{\cos\beta}=\frac{z-c'}{\cos\gamma}$ l'equazioni delle due rette la prima delle quali passa per il punto fisso A(a,b,c), la seconda per il punto A'(a',b',c'), e siano P, P' i piedi della minima distanza su ciascuna di esse e $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\pi$ i coseni di

direzione di PP', la projezione di AA' sopra PP', adoperando il metodo svolto nel precedente problema, si trova eguagliare $\cos\lambda(a-a')+\cos\mu(b-b')+\cos\pi(c-c')$, e riducendosi essa a PP' abbiamo:

$$PP'=\cos\lambda(a-a')+\cos\mu(b-b')+\cos\pi(c-c').$$

Ma dovendo PP' essere normale ad ambedue le rette hanno luogo le equazioni di condizione:

$$\cos\lambda\cos\alpha+\cos\mu\cos\beta+\cos\pi\cos\gamma=0,\quad \cos\lambda\cos\alpha'+\cos\beta'\cos\mu+\cos\gamma'\cos\pi=0,$$

da cui si deducono le

$$\cos\lambda : (\cos\beta\cos\gamma')=\cos\mu : (\cos\gamma\cos\alpha')=\cos\pi : (\cos\alpha\cos\beta')=\rho : 1,$$

ρ rappresentando il valore di ogni singolo rapporto. Mediante la relazione $\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\pi=1$, si ottiene per ρ il valore

$$\rho^2=1 : \left[(\cos\alpha\cos\beta')^2+(\cos\beta\cos\gamma')^2+(\cos\gamma\cos\alpha')^2\right],$$

e quindi per PP',

$$(8)\quad PP'=\frac{(a-a')(\cos\beta\cos\gamma')+(b-b')(\cos\gamma\cos\alpha')+(c-c')(\cos\alpha\cos\beta')}{\sqrt{(\cos\alpha\cos\beta')^2+(\cos\beta\cos\gamma')^2+(\cos\gamma\cos\alpha')^2}}.$$

Se le rette sono rappresentate dalle equazioni,

$$(b)\qquad \frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n},\quad \frac{x-a'}{l'}=\frac{y-b'}{m'}=\frac{z-c'}{n'};$$

ovvero dalle

$$x=az+p,\quad y=bz+q,\quad x=a'z+p',\quad y=b'z+q',$$

la (8) si trasforma nella espressione

$$(9)\qquad PP'=\frac{(a-a')(mn')+(b-b')(nl')+(c-c')(lm')}{\sqrt{(lm')^2+(mn')^2+(nl')^2}}$$

$$(10)\qquad PP'=\frac{(p-p')(b-b')+(q-q')(a'-a)}{\sqrt{(ab'-a'b)^2+(b-b')^2+(a-a')^2}}.$$

Esercizi.

I. Trovare la espressione dell'angolo formato da due rette, gli assi coordinati essendo obliquangoli.

II. Determinare l'equazione di una retta perpendicolare a due rette date, gli assi coordinati essendo rettangolari.

III. Le rette che congiungono i punti di mezzo delle costole opposte di un tetaedro passano per un medesimo punto.

IV. I sei piani dei quali ciascuno passa per una delle costole di un tetaedro e per il punto di mezzo della costola opposta s'incontrano in un medesimo punto.

V. I sei piani bisettori degli angoli formati dalle faccie di un Tetaedro passano per uno stesso punto.

VI. I piani bisettori degli angoli diedri formati da tre faccie di un Tetaedro che concorrono nello stesso vertice ed i piani esternamente bisettori degli angoli diedri compresi dalle tre faccie opposte si segano in un unico punto.

VII. In un quadrilatero qualunque sghembo la somma dei quadrati delle due diagonali, più quattro volte il quadrato della retta che ne congiunge i punti di mezzo, uguaglia la somma dei quadrati dei quattro lati.

VIII. Preso un punto in un piano, condurre in questo una retta la quale formi con un altro piano dato in posizione un angolo noto, gli assi coordinati essendo rettangolari.

— FINE —

INDICE

GEOMETRIA NEL PIANO

GEOMETRIA NELLO SPAZIO





